Trabajo Fin de Máster

Una red de modelos como propuesta didáctica: logaritmos y exponenciales para 4º de E.S.O.

A net of models as didactic proposal: logarithms and exponentials for 4º de E.S.O.

Máster Universitario en Profesorado
Matemáticas para E.S.O. y Bachillerato

Autor:

Juan Á. Serrano de Rodrigo

Director:

Sergio Martínez Juste

Universidad Zaragoza

Facultad de Educación
Universidad Zaragoza

Índice

A. Definición del objeto matemático a enseñar. **5**

1. Objeto matemático a enseñar. 5
2. Curso y asignatura en que se sitúa el objeto matemático. 5
3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretende enseñar. 5

B. Estado del proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático. **10**

1. Enfoque algebraico. 11
2. Enfoque analítico. 17
3. Efectos producidos por la enseñanza en el aprendizaje del alumno. . . 19

C. Conocimientos previos del alumno. **22**

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático. **24**

1. Razones de ser consideradas en la introducción escolar del objeto matemático. 24
2. Coincidencia o no con las razones históricas. 25
3. Diseño de problemas que se constituyen en razones de ser de los aspectos del objeto matemático a enseñar. 27
   - 3.1. El método del Carbono 14. 27
   - 3.2. Cálculo del interés compuesto. 28
   - 3.3. Decibelios y logaritmos. 28
   - 3.4. Escala sismológica de Richter. 29
4. Metodología de la implementación en el aula. 30

E. Sobre el campo de problemas. **34**

1. Diseño de los distintos tipos de problemas a presentar. 34
2. Modificaciones de la técnica inicial. 37
3. Metodología utilizada en la implementación en el aula. 38

F. Sobre las técnicas. **41**

1. Diseño de los distintos tipos de ejercicios a presentar en el aula. . . . 45

2. Técnicas o modificaciones de una técnica introducidas con los ejercicios. 50

3. Idoneidad de las técnicas respecto al campo de problemas asociado. . 53

4. Metodología utilizada en la implementación en el aula. 53

G. Tecnologías. 55

1. Razonamientos que justifican las técnicas. 55

2. Sujeto responsable de la justificación de las técnicas. 57

3. Metodología de la implementación en el aula. 58

H. Sobre la secuenciación didáctica y su cronograma. 60

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. 60

I. Sobre la evaluación. 63

1. Diseño de una prueba escrita. Aspectos a evaluar. 63

2. Criterio de calificación. 82

3. Comunicación y gestión de los resultados del examen. 84

Referencias 85

A. Definición del objeto matemático a enseñar.

1. Objeto matemático a enseñar.

De acuerdo con el currículo de Educación Secundaria de Aragón, correspondiente a la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, y el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los contenidos que hemos escogido desarrollar en la secuencia didáctica propuesta son los siguientes:

1. Logaritmo de un número real: definición y propiedades.
2. Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
3. Definición y propiedades de la función exponencial. Representación gráfica.
4. Definición y propiedades de la función logarítmica. Representación gráfica.
5. Relación entre la función exponencial y la función logarítmica. Criterio gráfico de determinación de una función recíproca o inversa.

2. Curso y asignatura en que se sitúa el objeto matemático.

Los objetos matemáticos a enseñar pueden encontrarse en 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, en la asignatura "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas".

3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretende enseñar.

A continuación enumeramos detalladamente los campos de problemas y las técnicas cuya enseñanza constituye el objeto de nuestra propuesta didáctica. Por último, se mencionan las tecnologías que sirven como justificación de las técnicas expuestas.

Campos de problemas

- CP1. Campo de problemas asociados al manejo de logaritmos.

- ✧ CP1.1. Dadas distintas sucesiones de números, calcular mediante la definición de logaritmo la sucesión dada por los logaritmos de dichos números y construir una tabla de valores relacionando cada pareja de valores.
- ✧ CP1.2. Dados dos números x, y, comparar el resultado de calcular $\log(x)+\log(y)$ con el de calcular $\log(x \cdot y)$.
- ✧ CP1.3. Dados dos números x, y, comparar el resultado de calcular $\log(x)-\log(y)$ con el de calcular $\log\left(\frac{x}{y}\right)$.
- ✧ CP1.4. Dada una sucesión de números en progresión geométrica, establecer la progresión que sigue la sucesión dada por los logaritmos de dichos números.

- CP2. Campo de problemas asociados al manejo de funciones exponenciales.

  - ✧ CP2.1. Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una función exponencial que permita modelizar diversos problemas científicos o de la vida cotidiana.
  - ✧ CP2.2. Dada una función de la forma $f(x) = a^x$, construir una tabla de valores y representarla gráficamente de manera aproximada.
  - ✧ CP2.3. Dada una función de la forma $f(x) = a^x$, determinar su dominio y recorrido, analizar el crecimiento y decrecimiento de la función, calcular sus extremos relativos (si los tiene) e identificar la asíntota horizontal.
  - ✧ CP2.4. Dada una función de la forma $f(x) = a^x$ mediante su representación gráfica, construir la gráfica de la función $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, identificando la relación de simetría entre ambas gráficas.

- CP3. Campo de problemas asociados al manejo de funciones logarítmicas.

  - ✧ CP3.1. Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una función logarítmica que permita modelizar diversos problemas científicos o de la vida cotidiana.
  - ✧ CP3.2. Dada una función de la forma $f(x) = \log_a(x)$, construir una tabla de valores y representarla gráficamente de manera aproximada.
  - ✧ CP3.3. Dada una función de la forma $f(x) = \log_a(x)$, determinar su dominio y recorrido, analizar el crecimiento y decrecimiento de la función, calcular sus extremos relativos (si los tiene) e identificar la asíntota vertical.
  - ✧ CP3.4. Dada una función de la forma $f(x) = \log_a(x)$ mediante su representación gráfica, construir la gráfica de la función $g(x) = \log_{1/a}(x)$, identificando la relación de simetría entre ambas gráficas.

- CP4. Campo de problemas asociados a la resolución de ec. exponenciales.

  ✧ CP4.1. Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una expresión algebraica con indeterminadas en uno o más exponentes.

  ✧ CP4.2. Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b$, utilizando la definición o expresando b como potencia de a e identificando exponentes.

  ✧ CP4.3 Resolver problemas en los que intervienen ecuaciones exponenciales de la forma $F(a^x) = 0$, con $F(x)$ un polinomio, mediante la técnica de cambio de variable.

  ✧ CP4.4. Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b$, utilizando los logaritmos y sus propiedades.

- CP5. Campo de problemas asociados a la resolución de ec. logarítmicas.

  ✧ CP5.1. Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una expresión algebraica en la que la incógnita aparece como argumento de un logaritmo.

  ✧ CP5.2. Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones logarítmicas de la forma $\log_a(f(x)) = b$, utilizando la definición de logaritmo.

  ✧ CP5.3. Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones logarítmicas de la forma $\log_a(f(x)) = \log_a(b)$, identificando los argumentos.

  ✧ CP5.4.Determinar la relación entre la variación de los argumentos de la función logarítmica y la de sus imágenes, observando su carácter no lineal.

- CP6. Relación de inversión entre la función exponencial $f(x) = a^x$ y la función logarítmica $g(x) = \log_a(x)$.

Técnicas.

- T0. Repaso: técnicas asociadas al manejo de potencias.

  ✧ T0.1. Producto de potencias de la misma base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

  ✧ T0.2. Cociente de potencias de la misma base: $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

  ✧ T0.3. Potencia de exponente 0: $a^0 = 1$ para todo número a.

  ✧ T0.4. Potencia de un producto: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

- ✧ T0.5. Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.
- ✧ T0.6. Potencia de una potencia: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

- T1. Técnicas asociadas al manejo de logaritmos.
  - ✧ T1.1. Propiedad fundamental del logaritmo: $\log_a(x) = y \Longleftrightarrow a^y = x$.
  - ✧ T1.2. Logaritmo de 1: $\log_a(1) = 0$ para toda base a.
  - ✧ T1.3. Logaritmo de un producto: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
  - ✧ T1.4. Logaritmo de un cociente: $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
  - ✧ T1.5. Logaritmo de una potencia: $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$.
  - ✧ T1.6. Técnica de cambio de base: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
  - ✧ T1.7. Relación entre $\log_a(x)$ y $\log_{1/a}(x)$.

- T2. Técnicas asociadas a las funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$.
  - ✧ T2.1. Confección de una tabla de valores para $f(x) = a^x$.
  - ✧ T2.2. Propiedad de ser función: *si* $x = y$, *entonces* $a^x = a^y$.
  - ✧ T2.3. Propiedad inyectiva: *si* $a^x = a^y$, *entonces* $x = y$.
  - ✧ T2.4. Técnica de cálculo del dominio de la función exponencial.
  - ✧ T2.5. Técnica de cálculo del recorrido de la función exponencial.
  - ✧ T2.6. Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función exponencial.
    - T2.6.1. Caso $0 < a < 1$: la función es estrictamente decreciente.
    - T2.6.2. Caso $a > 1$: la función es estrictamente creciente.
  - ✧ T2.7. Cálculo de los extremos relativos de la función exponencial.
  - ✧ T2.8. Técnica de identificación de la asíntota horizontal en la función exponencial.

- T3. Técnicas asociadas a las funciones logarítmicas de la forma $f(x) = \log_a(x)$.
  - ✧ T3.1. Confección de una tabla de valores para $f(x) = \log_a(x)$.
  - ✧ T3.2. Propiedad de ser función: *si* $x = y$, *entonces* $\log_a(x) = \log_a(y)$.
  - ✧ T3.3. Propiedad inyectiva: *si* $\log_a(x) = \log_a(y)$, *entonces* $x = y$.
  - ✧ T3.4. Técnica de cálculo del dominio de la función logarítmica.
  - ✧ T3.5. Técnica de cálculo del recorrido de la función logarítmica.
  - ✧ T3.6. Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función logarítmica.
    - T3.6.1. Caso $0 < a < 1$: la función es estrictamente decreciente.

- T3.6.2. Caso $a > 1$: la función es estrictamente creciente.

  - T3.7. Cálculo de los extremos relativos de la función logarítmica.
  - T3.8. Técnica de identificación de la asíntota vertical de la función logarítmica.

- T4. Técnicas asociadas a la relación entre funciones exponenciales y logarítmicas.

  - T4.1. Criterio gráfico para la determinación de la función inversa.
  - T4.2. Representación gráfica de una función inversa a partir de la gráfica de una función.
  - T4.3. Relación de inversión entre la función exponencial $f(x) = a^x$ y la función logarítmica $g(x) = \log_a(x)$.

- T5. Técnicas asociadas a la resolución de ecuaciones exponenciales.

  - T5.1. Resolución de ec. exponenciales por identificación de exponentes.
  - T5.2. Resolución de ec. exponenciales por cambio de variable.
  - T5.3. Resolución de ec. exponenciales mediante el uso de logaritmos.

- T6 Técnicas asociadas a la resolución de ecuaciones logarítmicas.

  - T6.1. Resolución de ec. logarítmicas por la definición de logaritmo.
  - T6.2. Resolución de ec. logarítmicas por identificación de argumentos.

Tecnologías.

- TEC1. Definición de potencia y logaritmo.
- TEC2. Demostraciones breves a partir de definiciones.
- TEC3. Demostraciones breves a partir de propiedades conocidas.

B. Estado del proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

En esta sección analizamos en cierto detalle el estado actual del proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos que nos ocupan. Para ello examinamos, en primer lugar, la ORDEN ECD/489/2016 de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. También tenemos en cuenta el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En base a estos dos documentos, los contenidos que deben tenerse en cuenta en la secuencia didáctica propuesta para 4º de E.S.O. son los siguientes:

- **Bloque 2: Números y álgebra.**
  1. Logaritmos. Definición y propiedades.
  2. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- **Bloque 4: funciones.**
  1. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
  2. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Entre los estándares de aprendizaje evaluables, pueden mencionarse:

- **Bloque 2: Números y álgebra.**
  - ✧ Est.MAAC.2.2.5. Calcula logaritmos sencillos a partir de su definición o mediante la aplicación de sus propiedades y resuelve problemas sencillos.
  - ✧ Est.MAAC.2.2.7. Resuelve problemas que requieran conceptos y propiedades específicas de los números.
- **Bloque 4: funciones.**
  - ✧ Est.MAAC.4.1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas

- ✧ Est.MAAC.4.1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
- ✧ Est.MAAC.4.1.3. Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.
- ✧ Est.MAAC.4.1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.
- ✧ Est.MAAC.4.1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.

La ambigüedad e imprecisión del texto legal, patente a juzgar por los párrafos señalados, condiciona el hecho de que sean los textos didácticos quienes *de facto* materializan los contenidos concretos del currículo (Schubring, 1987). Es por ello importante realizar un breve análisis de este material, exponiendo las aportaciones de distintas fuentes. De forma simultánea, comentaremos algunos aspectos relativos a la justificación habitual de la introducción escolar de los objetos matemáticos estudiados.

Para llevar a cabo este estudio hemos analizado y comparado seis libros de texto correspondientes a la asignatura "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas" de 4º de E.S.O. De ellos, cinco han sido publicados en 2016 y siguen el currículo establecido por la L.O.M.C.E. El sexto, de la editorial SM, fue publicado en 2009, y lo hemos introducido como contraste para observar posibles diferencias. En líneas generales, nuestro análisis muestra que la introducción escolar de los objetos matemáticos se ha llevado a cabo tradicionalmente a partir de dos enfoques esencialmente distintos: el algebraico y el analítico. Describimos a continuación las características de ambos enfoques.

1. Enfoque algebraico.

Desde este enfoque, la noción de logaritmo de un número real se introduce, simplemente, como operación inversa a la exponenciación. Así, podemos leer en en Colera, Oliveira, Gaztelu, y Colera (2016): "Se llama **logaritmo** en base a de P, y se escribe $\log_a P$, al exponente al que hay que elevar la base a para obtener P." De igual modo, Gámez y cols. (2016) afirman: "dados dos números reales positivos a y b, con $a \neq 1$, el **logaritmo en base a de b**, $\log_a b$, es el exponente al que hay que elevar a para obtener b." Podemos encontrar definiciones totalmente análogas a las anteriores en el resto de textos.

La justificación de la introducción del logaritmo, desde el enfoque algebraico, aparece con la observación de que tal objeto "permite resolver ecuaciones en las que las incógnitas aparecen como parte de un exponente". Destaca una razón de ser diferente, esgrimida en de Lucas, Peña, y Rey (2016), donde aparece una actividad que trata de poner de manifiesto la conveniencia de usar logaritmos en situaciones en las que los datos a representar sean muy dispares. Así, se comparan los pesos de un rotífero ($10^{-8,22}$ g), una hormiga ($10^{-2,22}$ g), un elefante ($10^{6,95}$ g) y una ballena ($10^{8,11}$ g), observando que el gráfico de barras correspondiente a considerar los exponentes es más claro a la hora de apreciar las diferencias entre los pesos.

A continuación se introducen los logaritmos decimales, cuya notación característica consiste en omitir la base. Los logaritmos neperianos no suelen definirse en esta etapa, aunque los textos de Arias y Maza (2016); de Lucas y cols. (2016); Vizmanos, Anzola, de los Santos, y Hervás (2009) sí los mencionan, sin definirlos rigurosamente (suelen aparecer en ejercicios o como notas al margen). Por su parte, Mejía, Ocaña, y Romero (2016) proponen a los alumnos investigar qué son los logaritmos neperianos y realizar "una presentación en PowerPoint" acerca de su historia como tarea para casa.

Entre las propiedades básicas que se introducen, cabe destacar las siguientes, presentes, por ejemplo, en los textos de Arias y Maza (2016); de Lucas y cols. (2016); Vizmanos y cols. (2009).

- El logaritmo de la base es siempre igual a 1: $\log_b b = 1$.
- El logaritmo en cualquier base de 1 es igual a 0: $\log_b 1 = 0$.
- Los números $N \leq 0$ no tienen logaritmo real.

Mejía y cols. (2016), por su parte, añaden también la propiedad $\log_b(b^n) = n$.

Una vez expuestas las anteriores propiedades aparecen los primeros ejercicios, dirigidos a aplicar la definición y las primeras propiedades enunciadas. Uno de los más frecuentes, que extraemos de Colera y cols. (2016), pide hallar distintos logaritmos, como

$$\log_5 125, \quad \log_2 0,0625, \quad \log_2(1/\sqrt{2}), \ ...$$

utilizando la definición. También son muy frecuentes otros ejercicios en los que se pide hallar la base de un logaritmo a partir de una igualdad:

$$\log_a 10\,000 = 2, \quad \log_b 216 = 3, \quad \log_d 3 = \frac{1}{2}, \ ...$$

Estos últimos merecen señalarse, ya que este tipo de ecuaciones, en las que la incógnita aparece en la base del logaritmo, no vuelven a plantearse en ningún otro momento de curso.

Las siguientes propiedades fundamentales, presentes en todos los libros de texto sin excepción, son las primeras que requieren una demostración formal como tecnología:

- Logaritmo de un producto: $\log_b[M \cdot N] = \log_b M + \log_b N$.
- Logaritmo de un cociente: $\log_b \left[\dfrac{M}{N}\right] = \log_b M - \log_b N$.
- Logaritmo de una potencia: $\log_b M^r = r \cdot \log_b M$.

Tales demostraciones recurren a la definición del logaritmo y las propiedades de las potencias, que se suponen conocidas. Como ejemplo, enunciamos aquí la propiedad del logaritmo de un producto, que puede verse en Vizmanos y cols. (2009):

$$\log_b M = x \iff b^x = M$$
$$\log_b N = y \iff b^y = N$$

Por tanto,

$$M \cdot N = b^x \cdot b^y = b^{x+y}.$$

Volviendo a utilizar la definición, obtenemos:

$$\log_b[M \cdot N] = x + y = \log_b M + \log_b N.$$

Hay que señalar, sin embargo, que no todos los textos enuncian esta tecnología para justificar la técnica de manejo de operaciones (aparece tan sólo en Vizmanos y cols. (2009), Mejía y cols. (2016), y, con especial detalle, en Arias y Maza (2016)). En Colera y cols. (2016), por contra, esta técnica no se justifica en absoluto, sino que tan sólo se muestra a través de ejemplos (y éstos ni tan siquiera permiten comprobar la igualdad del resultado numérico). Podemos ver, por ejemplo, la expresión:

$$\log_2 \frac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt[3]{4} - \log_2 \sqrt{2}$$

Sorprendentemente, el texto de de Lucas y cols. (2016) es el único en el que aparecen justificadas por la comprobación numérica en casos concretos. Por último, Gámez y cols. (2016) enuncian únicamente las propiedades, sin ningún comentario ulterior. Con todo lo anterior, el cálculo de muchos logaritmos se reduce utilizando las técnicas descritas. Los ejercicios subsiguientes están, por lo común, diseñados para aplicar convenientemente las propiedades previamente enunciadas y demostradas.

Comentario aparte merece la propiedad de unicidad del logaritmo, la cual se utiliza de manera esencial en la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Un buen número de los textos no la menciona en la unidad didáctica dedicada al logaritmo: Vizmanos y cols. (2009), de Lucas y cols. (2016) y Gámez y cols. (2016) son los que más se acercan, incluyéndola como escuetas notas al margen.

El siguiente párrafo está extraído de de Lucas y cols. (2016), que vuelve a apoyarse prudentemente en el manejo numérico concreto para justificar afirmaciones algebraicas generales:

> "Si dos números son iguales, al calcular su logaritmo, el resultado será el mismo. Además, dos números con el mismo logaritmo son iguales:
>
> $$\log_2 8 = 3 = \log_2 P$$
>
> $$\left.\begin{array}{r} 2^3 = 8 \\ 2^3 = P \end{array}\right\} \rightarrow 8 = 2^3 = P.$$
>
> Es decir: $\log_a P = \log_a Q \Leftrightarrow P = Q$".

Debe señalarse que esta propiedad no suele aparecer justificada por tecnología alguna, a pesar de servir como técnica para la resolución de ecuaciones – problema tradicionalmente considerado como fundamental en el bloque de Álgebra. Por ejemplo, Arias y Maza (2016) enuncian únicamente que, de fallar todos los demás métodos conocidos, "se deja en cada miembro un solo término y *se aplican logaritmos*" (la cursiva es nuestra).

Merece destacar la exposición de Vizmanos y cols. (2009), sin duda la más completa de todas las que hemos podido observar. En el resto de libros, la técnica aludida aparece implícitamente en la resolución de ecuaciones exponenciales (Colera y cols. (2016), de Lucas y cols. (2016)). Otros textos, como Mejía y cols. (2016), ni siquiera mencionan la resolución de este tipo de ecuaciones. En cualquier caso hay que tener en cuenta que, aunque la justificación podría apoyarse también en la evidencia de que $f(x) = \log_a(x)$ es una función inyectiva, el ordenamiento tradicional del currículo hace imposible semejante comentario por parte del docente, ya que el bloque dedicado a las funciones logarítmicas se expone bastante después.

El problema derivado de la imprecisión con la que se enseña este método de resolución de ecuaciones exponenciales se ve agravado por el hecho de que, sin excepción, las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones exponenciales aparecen en una unidad didáctica distinta a aquella en la cual se estudian los logaritmos. De este modo, la definición y primeras propiedades de estos últimos quedan despojadas de todo sentido – incluso como herramienta intramatemática –, y no es sino después de varias unidades didácticas que recuperamos estos objetos por sus interesantes propiedades algebraicas, enunciadas ahora implícitamente y con poca claridad y cohesión.

La última técnica relativa a la manipulación de logaritmos que suele introducirse desde este enfoque algebraico es la del cambio de base. Así, por ejemplo, Vizmanos y cols. (2009) explica:

> "La relación entre los logaritmos de un mismo número, N, calculados en dos bases distintas, a y b, viene dada por:
>
> $$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \text{ ”.}$$

La demostración de esta propiedad es, sin duda, una de las más formales – en el sentido de "desprovista de significado intuitivo" – que pueden encontrarse en el currículum de 4º de E.S.O. En efecto, resulta harto difícil encontrar un libro de texto que se atreva a lidiar con este formalismo. Los únicos en los que podemos hallar una mínima justificación son los de Vizmanos y cols. (2009) y de Lucas y cols. (2016). Este último, en particular, vuelve a utilizar números concretos para ejemplificar la propiedad general que a continuación enuncia. Citamos textualmente (el razonamiento seguido en Vizmanos y cols. (2009) es similar):

> "Por ejemplo, sabemos que $64 = 2^6$ y, por tanto, $\log_2 64 = 6$. Si queremos averiguar el exponente si la base fuese 4, $4^x = 64$, tendríamos que calcular $\log_4 64 = x$. Fíjate en cómo se hace:
>
> $$\log_2 4^x = \log_2 64 \longrightarrow x \cdot \log_2 4 = \log_2 64.$$
>
> Despejando: $x = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4} = \dfrac{6}{2} = 3$".

Para comprender la justificación de la introducción de esta última técnica, debe recordarse que en la época previa a la aparición de las calculadoras, los logaritmos se calculaban utilizando tablas de logaritmos. Estas tablas consistían en un registro sistemático de los valores de los logaritmos (usualmente decimales o neperianos) hasta una cierta precisión. Dado que en las tablas sólo aparecían los valores de los logaritmos en una cierta base, frecuentemente se hacía necesario llevar a cabo cambios de base para poder utilizarlas, dado que, a priori, en la resolución de ecuaciones exponenciales pueden aparecer logaritmos en cualquier base. De hecho, incluso en la actualidad, existen calculadoras que no dan la opción de calcular otros logaritmos que los decimales y neperianos. La fórmula del cambio de bases queda justificada, por tanto, como herramienta para calcular logaritmos en otras bases (véanse Mejía y cols. (2016), de Lucas y cols. (2016) y Gámez y cols. (2016)). Sin embargo, debido a la aparición de herramientas de cálculo más potentes, esta técnica ha quedado algo obsoleta y desprovista de significado para el alumnado. Podemos entender su pervivencia vestigial dentro del sistema educativo como un signo indicativo de la enorme importancia que debió de tener en su momento.

La resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas, como ya hemos mencionado, aparece siempre en una unidad didáctica distinta. Transcribimos a continuación la definición de ecuación exponencial dada por Vizmanos y cols. (2009):

> "Las ecuaciones en las que la incógnita aparece en el exponente se denominan **ecuaciones exponenciales**."

Todos los textos, con mayor o menor detalle, coinciden en aplicar los siguientes pasos para resolver ecuaciones exponenciales:

1. Expresar, si se puede, todas las potencias de la ecuación como potencias de la misma base. Normalmente se elegirá la base menor y siempre es preferible dejar la incógnita x sola en el exponente.

2. Realizar un cambio de incógnita. Normalmente se cambiará a^x por la incógnita z. Al final, hay que deshacer el cambio para hallar x.

3. Tomar logaritmos cuando ya no se puedan aplicar las técnicas anteriores. Así, los exponentes se convierten en factores.

Como tecnologías que justifiquen estas técnicas aparecen, por lo general, ejemplos descontextualizados de ecuaciones exponenciales resueltas de este modo. Consecuentemente, el campo de problemas asociado a esta técnica está formado por ejercicios en los que se plantea la resolución de distintas ecuaciones exponenciales utilizando las técnicas anteriormente descritas.

Del mismo modo, las ecuaciones logarítmicas se definen como "aquellas en las que la incógnita aparece formando parte de un logaritmo"; véase Vizmanos y cols. (2009). Para resolverlas, se alude explícitamente – es el único texto que lo hace con esta claridad –, a la propiedad de unicidad del logaritmo, previamente enunciada:

$$\log_b M = \log_b N \iff M = N.$$

Al igual que sucede con las ecuaciones exponenciales, las tecnologías utilizadas para justificar esta técnica consisten en ejemplos de resolución de ecuaciones logarítmicas concretas. El campo de problemas, de nuevo, consta de ejercicios de resolución de ecuaciones logarítmicas utilizando las técnicas descritas en este apartado.

En suma, podemos afirmar que el enfoque algebraico en la enseñanza del logaritmo está basado en una exposición didáctica tradicional: los objetos matemáticos introducidos no están provistos de ninguna razón de ser que los justifique, y el campo de problemas está constituido por ejercicios con el objetivo de que el alumno practique y afiance las técnicas previamente introducidas. Es llamativa la ausencia total de problemas concretos que justifiquen los conceptos expuestos; observamos, más bien, un cierto carácter cíclico: los objetos y técnicas que aparecen se justifican como herramientas que permiten resolver ecuaciones. Posteriormente, estas ecuaciones aparecen como meros ejercicios cuyo sentido es, simplemente, practicar las técnicas introducidas.

2. Enfoque analítico.

Este enfoque es el que destaca en las unidades didácticas dedicadas a la introducción de funciones y gráficas. En ellas, el logaritmo en una base dada se identifica con la función logarítmica real, que a cada número le asocia su logaritmo en dicha base. De igual modo, la exponenciación está identificada con la función exponencial, ya sea en base 10 o en base e (mucho menos frecuente, por lo general).

La particularidad del enfoque analítico reside, en contraposición al anterior, en una atención algo mayor a la justificación de los objetos introducidos mediante situaciones de la vida real. Así, por ejemplo, podemos leer en Colera y cols. (2016) un problema detallado al final de la lección que utiliza funciones exponenciales para explicar el método del Carbono 14. de Lucas y cols. (2016), por su parte, habla de la reproducción de bacterias como problema para introducir la función exponencial $f(x) = 2^x$.

Hay que mencionar, en cualquier caso, que los problemas contextualizados procedentes de contextos científicos no suelen aparecer como razón de ser que motive la introducción de funciones exponenciales y logarítmicas. Lo habitual es que se enuncien como simples curiosidades al final de la unidad didáctica. Así, de Lucas y cols. (2016) incluyen un ejercicio sobre la escala de Richter; Colera y cols. (2016) exponen el problema sobre el Carbono 14 antes mencionado, y Gámez y cols. (2016) hablan sobre la medición del pH en un laboratorio. Otros textos, como los de Arias y Maza (2016); Mejía y cols. (2016), no ofrecen problemas contextualizados en esta unidad didáctica.

Dado que este tema se centra en el estudio de funciones y gráficas, todos los textos hacen especial hincapié en la representación gráfica de estas funciones. Así, el campo de problemas consiste en ejercicios orientados a la construcción de tablas de valores y la representación gráfica de distintas funciones exponenciales y logarítmicas. La manipulación simbólica de estas funciones, así como las posibles operaciones entre ellas, quedan ahora al margen.

Se tratan, además, otros aspectos básicos, como son: el dominio, el recorrido, la continuidad y el crecimiento de estas funciones. Así, en el caso de las funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$, todos los textos mencionan las siguientes propiedades:

- Sus gráficas pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$, ya que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.
- Si $a > 1$, la función $y = a^x$ es creciente en todo el dominio.
- Si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ es decreciente en todo el dominio.
- Para estas funciones, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$, si $a > 1$, y en $+\infty$, si $0 < a < 1$.

La justificación de las anteriores afirmaciones viene dada por la observación de las gráficas concretas de diversas funciones exponenciales, construidas habitualmente a partir tablas de valores. Como es natural, no se dan demostraciones rigurosas de las propiedades referidas a asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

Al introducir la función exponencial de base e, es llamativa su justificación como una función que "aparece en múltiples procesos naturales, como el crecimiento de poblaciones de microorganismos. Lo mismo sucede con la función $y = e^{-x}$, que describe procesos como las desintegraciones radiactivas" (Vizmanos y cols., 2009). Resulta llamativo que el texto no acompañe este tipo de afirmaciones con problemas contextualizados que las ejemplifiquen.

De la función logarítmica en base b se comentan, sin excepción, las siguientes propiedades:

- Su dominio se encuentra formado por los números reales positivos, $\mathbb{R}^+$, y su recorrido, por todos los números reales.
- Son continuas en todo su dominio.
- Si $a > 1$, la función es negativa para valores de x menores que 1, y positiva para valores de x mayores que 1, y es creciente en todo su dominio.
- Si $a < 1$, la función es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$, y es decreciente en todo su dominio.
- Tienen como asíntota vertical la recta $x = 0$.
- Siempre pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Además, muchos textos introducen el logaritmo neperiano, denotado como ln.

En Vizmanos y cols. (2009) se enuncia la relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas por medio de la composición: si $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = \ln(x)$, entonces se tiene:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$$

Por la definición de logaritmo, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$, por lo que la composición resulta ser la identidad. Así, se concluye, usando las definiciones, que ambas funciones son recíprocas. Se menciona también la traducción de esta propiedad en términos de representaciones gráficas de ambas funciones: "sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante" (p. 215). Ambos resultados se enuncian en toda generalidad para cualquier base.

Por lo general, los textos no suelen incluir explicaciones tan formales sobre la relación entre la función exponencial y la logarítmica. De hacerlo, como en Arias y Maza (2016); Colera y cols. (2016); Mejía y cols. (2016), se suele recurrir al criterio gráfico de simetría para la determinación de funciones inversas. Otros textos, como de Lucas y cols. (2016), se centran más en el estudio de propiedades del logaritmo a partir de su representación gráfica. Así, observando que las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2(x)$ y $g(x) = \log_{1/2}(x)$ son simétricas respecto al eje de las x, se concluye la relación $\log_2(x) = -\log_{1/2}(x)$.

Los ejercicios propuestos más usuales piden utilizar la propiedad gráfica previamente descrita para representar funciones a partir de otras ya conocidas, evitando así realizar manipulaciones simbólicas para calcular las funciones recíprocas.

3. Efectos producidos por la enseñanza en el aprendizaje del alumno.

Concluimos esta sección señalando algunos posibles efectos que enseñanza habitual de estos objetos produce sobre el aprendizaje del alumno.

En lo que respecta al enfoque algebraico, estudiado en primer lugar, es razonable pensar que el alumnado no considerará suficientes las razones aducidas a la hora de introducir el logaritmo de un número real: la posibilidad de resolver cierto tipo de ecuaciones se revela como un argumento débil, ya que en ningún caso se ha justificado que las ecuaciones exponenciales y logarítmicas aparezcan de un modo natural en la resolución de problemas matemáticos, o de otro ámbito científico. Así, estos objetos aparecen como desprovistos de significado, quedando como meros artificios que permiten manipulaciones simbólicas abstractas.

Por otra parte, el enfoque analítico permite una mayor aproximación al estudio de problemas concretos que modelizan problemas científicos, tales como la medición de la energía de un terremoto. La exponenciación, tratada desde el punto de vista del estudio de la función exponencial, puede introducirse para dar respuesta a problemas financieros, como el de hallar la función que calcula, dado un capital inicial c_0, el capital resultante de colocar dicho capital a un interés determinado, a (expresado en tanto por uno), transcurrido un tiempo t. Este tratamiento es seguido en detalle por de Lucas y cols. (2016), quienes dedican varios apartados a estudiar en detalle este tipo de problemas, dentro de la unidad didáctica de potencias y logaritmos, si bien no desde el punto de vista del estudio de funciones. La función que obtienen es, esencialmente, la siguiente:

$$C(t) = c_0 \cdot (1 + a)^t$$

Hay que decir que el estudio de las funciones exponencial y logarítmica suele tratarse en esta etapa de un modo aún demasiado superficial, de forma que tampoco se justifica plenamente la introducción de técnicas para la manipulación simbólica y algebraica como herramienta en el estudio de estas funciones. Por último, debe mencionarse que muchas de las aplicaciones en física, química o geología de los logaritmos y exponenciales pueden mostrarse tan solo parcialmente, por quedar éstas fuera del alcance de los alumnos en este momento de su formación.

Es comúnmente aceptada la afirmación de que las distintas áreas de las matemáticas en ningún caso deben considerarse como "compartimentos estanco": antes bien, en numerosas ocasiones se recalca como característica esencial de esta materia su condición de *saber acumulativo*, en el que todas las nociones estudiadas han de ser recordadas para aplicarlas en los cursos sucesivos. En contraposición a este prudente modo de entender las matemáticas observamos, tanto en el currículo oficial como en la disposición de los contenidos en los libros de texto, una disgregación difícilmente justificable de los objetos matemáticos a estudiar. Como resultado de la separación por bloques, la introducción del logaritmo queda totalmente desprovista de sentido, ya que su utilización como herramienta para resolver ecuaciones exponenciales no se revela hasta más adelante.

De igual manera, la estructura del currículo hace imposible utilizar todos los modelos disponibles de forma simultánea para apoyarse en la enseñanza de logaritmos y exponenciales. Tal y como se muestra a los estudiantes, pudiera parecer que el logaritmo y la exponencial son objetos estrictamente algebraicos, dejando en un segundo plano su estudio desde el punto de vista analítico-geométrico. Esta misma preocupación es la que señalan Ferrari y Farfán (2008) al poner de manifiesto la falta de diversidad de la que adolecen los modelos utilizados tradicionalmente para la enseñanza de estos objetos matemáticos. Su propuesta consiste, precisamente, en superar la disgregación aludida, introduciendo lo que ellos llaman "red de modelos".

En sus propias palabras: “lo numérico, lo gráfico y lo algebraico como *red de modelos* entremezclados con las prácticas de referencia y sociales nos crean un ámbito de argumentación y por ende de construcción de un discurso alrededor de lo logarítmico” (p. 327). (La cursiva es nuestra.)

La carencia que ponemos de manifiesto es también recogida por Gacharná (2015), quien afirma con preocupación que “uno de los aspectos donde la enseñanza de la matemática es más descontextualizada es la enseñanza de los logaritmos” (p. 61). Este mismo autor señala. siguiendo a Ferrari, diversos obstáculos que presenta la construcción tradicional de este concepto, entre los que destacan “[...] la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición” y “la importancia que escolarmente se le confiere al registro algebraico en detrimento de otros”.

Basándonos en el análisis de los textos anteriores, podemos concluir este apartado expresando nuestra percepción de que la estructuración de los contenidos, tal y como se plantea tradicionalmente, obstaculiza sin duda el planteamiento de un enfoque cohesionado en la enseñanza de logaritmos y exponenciales. La falta de variedad y la desconexión de los modelos ofrecidos al alumno provocan, por tanto, una contradicción con la tesis de que las matemáticas deben formar un todo unificado. Nos atrevemos a aventurar que la posible razón histórica de esta (des)organización curricular se halla en la corriente estructuralista desarrollada a mediados del S. XX, la cual propuso una clasificación de la disciplina matemática por áreas rigurosamente definidas y delimitadas. Si bien nadie pone en duda el espíritu enciclopédico y unificador de grupos destacados como Bourbaki, parece razonable pensar que los excesos en el afán de categorización han podido desembocar en una percepción, sin duda errónea, de que las distintas ramas de la matemática pueden enseñarse de forma independiente y aisladas las unas de las otras. Antes al contrario, nuestra propuesta se afirma sobre el convencimiento de que la mayor riqueza posible de modelos cohesionados procedentes de distintas áreas es, precisamente, la que mejores perspectivas ofrece en la creación de aprendizajes significativos.

Nuestra propuesta consiste, por tanto, en una reordenación de los contenidos del currículo de 4º de ESO: en vez de introducir los logaritmos y las potencias como objetos algebraicos, deduciendo desde este enfoque sus propiedades y los métodos de resolución de ecuaciones asociadas, planteamos introducirlos utilizando todos los medios a nuestro alcance, desde una perspectiva sintética, generando una “red de modelos”. De este modo, y apoyándonos en una batería de problemas modelizados por las funciones logarítmica y exponencial, esperamos poder ofrecer una visión más cohesionada para el estudio de estos objetos.

C. Conocimientos previos del alumno.

Dado que el logaritmo está íntimamente relacionado con la exponenciación, es fundamental que los alumnos posean cierto dominio, al menos, de las operaciones con potencias enteras y racionales antes de su introducción. En particular son cruciales las propiedades relacionadas con el producto y cociente de potencias de la misma base, ya que éstas constituyen esencialmente la tecnología que permite demostrar las propiedades de las operaciones con logaritmos. Las técnicas generales de resolución de ecuaciones (cambio de variable, resolución de la ecuación de segundo grado, resolución de ecuaciones bicuadradas, etc.) deberían repasarse, ya que también aparecen con frecuencia en el contexto de la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

En lo referente a las funciones exponencial y logarítmica, es conveniente que los alumnos estén familiarizados con los conceptos de dominio, recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento de una función. No es necesario un conocimiento riguroso de algunos de estos conceptos, pero sí, al menos, cierta noción intuitiva.

Teóricamente al menos, la enseñanza anterior debería haber propiciado la adquisición por parte del alumno de todos estos conocimientos previos. De hecho, muchas de las técnicas aludidas forman parte del currículum de 4º de E.S.O. Por ejemplo, las nociones básicas relativas al estudio de funciones aparecerán en el tema introductorio correspondiente en este mismo curso, previo al estudio de ejemplos concretos de funciones. En cuanto a las técnicas de resolución de ecuaciones, las más básicas de entre ellas deben ser introducidas en 3º de E.S.O., mientras que la manipulación simbólica de potencias con exponente racional es objeto de estudio en las primeras unidades didácticas de 4º de E.S.O.

A pesar de que, como señalamos, los conocimientos previos necesarios para el estudio de los logaritmos y exponenciales han debido enseñarse en algún momento anterior de esta etapa, podemos mencionar algunos problemas que son susceptibles de aparecer.

El primero de ellos, y quizá el más común, surge por estar los estudiantes poco familiarizados aún con las técnicas asociadas al manejo de potencias, dado que las han aprendido recientemente. Esta falta de práctica les lleva a tener poca confianza a la hora de manipular objetos algebraicos de este tipo, así como a cometer errores básicos en su manejo. Es, por tanto, conveniente dedicar algunas sesiones para refrescar estas técnicas antes de comenzar la unidad didáctica dedicada a los logaritmos. Otra opción posible sería no dejar de repasar las operaciones con potencias en ningún momento del curso, dejando regularmente a los estudiantes hojas con ejercicios para practicar las operaciones con potencias en casa y dedicando unos minutos de cada clase a corregir estos ejercicios. Por último, podría plantearse incluir un ejercicio de este tipo en todas las pruebas escritas posteriores a la unidad didáctica correspondiente al manejo de potencias, de forma que los alumnos se vieran en la necesidad de no dejar caer en el olvido las técnicas aprendidas.

En segundo lugar, debemos señalar la posibilidad de que los alumnos hayan olvidado gran parte de las técnicas generales básicas relativas a la resolución de ecuaciones. Es razonable pensar que, al haber pasado algún tiempo sin utilizar estas técnicas y no habiendo tenido la necesidad de repasarlas, los alumnos sólo recuerden algunos de los aspectos más básicos relacionados con el tema. Para comprobar el estado de sus conocimientos sería conveniente realizar una evaluación inicial a comienzo del curso, de forma que pudiera obtenerse información más precisa y reaccionar de forma preventiva ante los problemas que puedan surgir. En este caso, podríamos esperar que el desarrollo del bloque de Álgebra contemple un repaso de estas nociones básicas al mismo tiempo que introduce nuevos conceptos y tipos de ecuaciones.

Por ejemplo, al introducir las técnicas de resolución de ecuaciones exponenciales, se hace necesario un repaso de la técnica del cambio de variable. Este repaso podría darse precisamente en el momento en que se observe como necesario el uso de esta técnica, propiciando así que los estudiantes redescubran técnicas anteriormente vistas, y que se revelan necesarias en un nuevo contexto.

En definitiva, aunque es esperable que los alumnos hayan adquirido los conocimientos previos necesarios para abordar el estudio de logaritmos y exponenciales, los posibles problemas derivados de la falta de práctica o el olvido de algunas técnicas deberían corregirse realizando repasos regulares de las técnicas aprendidas, así como una evaluación inicial a comienzos del curso que nos permita reaccionar con tiempo ante la situación. La dificultad aquí consiste en mantener cohesionado y coordinado un conjunto de técnicas íntimamente relacionadas entre sí, pero que, debido a la variedad de contenidos del currículo, sólo reaparecen después de haber permanecido mucho tiempo sin utilizarse.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

1. Razones de ser consideradas en la introducción escolar del objeto matemático.

Como hemos visto en el apartado B, la introducción de los logaritmos desde el punto de vista del estudio de sus propiedades algebraicas tiene como inconveniente la dificultad de justificar adecuadamente su necesidad para la modelización y resolución de problemas en ámbitos científicos y cotidianos. Por otro lado, la secuenciación de los contenidos en el currículo de 4º de ESO incluye, dentro del bloque de Álgebra, las unidades didácticas dedicadas a la introducción y el estudio de los logaritmos. En la práctica, los docentes suelen agrupar de este modo los contenidos, ya que ello permite explicar todos aquellas técnicas que intervienen en la resolución de los distintos tipos de ecuaciones en un mismo momento del curso. De este modo, los alumnos aprenden, de golpe, todo el abanico de técnicas algebraicas básicas que utilizarán en cursos posteriores. Otra razón que puede aducirse como explicación de esta preferencia es, simplemente, la influencia de la llamada "espistemología espontánea del profesor". Ésta epistemología se configura como un conjunto de creencias no explícitas acerca de la enseñanza de las matemáticas, asumidas como ciertas por los docentes, y que no han sido examinadas de forma rigurosa.

A pesar de la validez de este criterio en la secuenciación de los contenidos, es inevitable señalar el inconveniente que tal ordenación presenta a la hora de justificar la necesidad de todos los objetos matemáticos introducidos. En efecto, a los alumnos se les presentan los logaritmos como una herramienta para resolver ecuaciones exponenciales, pero lo cierto es que la necesidad de resolver este tipo de ecuaciones no queda justificada en ningún momento. De hecho, la resolución de este tipo de ecuaciones aparece, a posteriori, como un mero ejercicio cuya única razón de ser es que los alumnos practiquen las técnicas de manipulación algebraica de logaritmos previamente estudiadas. Éste es el mencionado "carácter cíclico" al que hemos aludido en la sección B. Por otro lado, la justificación de tipo histórico, en la que se menciona la importancia de los logaritmos como herramienta para la simplificación de operaciones producto, queda en cierto modo obsoleta por la existencia de herramientas de cálculo más potentes y eficaces tales como las calculadoras o los ordenadores.

Nuestra propuesta se centra en la exposición de problemas científicos o cercanos al alumno en los que aparezcan de forma natural funciones logarítmicas y exponenciales. Dado que en la resolución de estos problemas se utilizan las propiedades algebraicas de los logaritmos, ellos han de justificar la introducción de las técnicas algebraicas relativas a estos objetos. Por último, no debemos olvidar que la posibilidad de visualizar gráficamente estas funciones permite un acercamiento intuitivo y directo a algunas de sus propiedades algebraicas más elementales. Por ejemplo, puede observarse de manera sencilla que no existe el logaritmo real de un número negativo sin más que observar la gráfica de la función. La síntesis entre los enfoques analítico y algebraico aparece aquí, por tanto, como recurso para combinar las herramientas de uno y otro bloque en la exposición de los objetos matemáticos introducidos.

2. Coincidencia o no con las razones históricas.

En vista de las observaciones realizadas a lo largo de las secciones precedentes, es claro que las razones de ser aducidas no coinciden con las históricas en la introducción de logaritmos y funciones exponenciales. Como ya hemos mencionado, el cálculo de los primeros logaritmos surgió a comienzos del siglo XVII como métodos heurísticos que convertían la multiplicación en suma, facilitando la realización de cálculos. Algunos de estos métodos estaban estrechamente relacionados con las identidades trigonométricas. Éste es el caso de la *prostaféresis*, un algoritmo utilizado para resolver problemas de navegación por medio de la determinación de la posición de los astros, usando para ello trigonometría esférica. Algunas de las identidades utilizadas, que transforman productos de funciones trigonométricas en sumas y restas de estas funciones, se estudian aún hoy en día en los institutos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\\
\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}\\
\operatorname{sen}(a)\cos(b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2}\\
\cos(a)\operatorname{sen}(b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)}{2}
\end{aligned}
$$

El método de cálculo basado en el uso de logaritmos fue publicado por primera vez en 1614 por John Napier (de quien el logaritmo *neperiano* toma su nombre), en su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (“Descripción del maravilloso método de los logaritmos”). Algunas imágenes de la edición original del trabajo de Napier pueden verse aquí. Hay que señalar que las técnicas desarrolladas por Napier habían sido ya utilizadas anteriormente por Jorst Bürgi alrededor de 1600, pero éstas no fueron hechas públicas. Los logaritmos contribuyeron significativamente al desarrollo de la ciencia debido a que permitían simplificar cálculos. Para su uso era indispensable utilizar *tablas de logaritmos*, registros exhaustivos en los que se presentaba el valor de $\log_b(x)$ y b^x para cualquier número x, dentro de un cierto rango y precisión, para alguna base b (usualmente $b = 10$). La primera tabla de logaritmos fue creada por Henry Briggs en 1617.

Por su parte, la invención de la función hoy llamada *logaritmo natural* comenzó como un intento para obtener la cuadratura de una hipérbola rectangular. Varios matemáticos jesuitas, como Gregoire de Saint Vicent y A. A. de Sarasa, realizaron publicaciones estableciendo relaciones entre este problema y los métodos conocidos de prostaféresis. Finalmente, fue Leibniz (1675) quien estableció la notación $\log(x)$ y demostrando la relación:

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

En lo que respecta a la función exponencial, debe destacarse que ésta permite modelizar adecuadamente los problemas en los que una cantidad crece o decrece a un ritmo proporcional a su valor actual. Una de las situaciones reales en las que esto sucede es el cálculo del interés compuesto visto como función continua. En efecto, si una unidad monetaria percibe un interés anual x distribuido en pagos mensuales, entonces el interés recibido cada mes es $x/12$ veces el valor actual del depósito, de forma que el valor total es multiplicado por $(1 + \frac{x}{12})$ cada mes. Así, el valor al final del año es

$$\left(1 + \frac{x}{12}\right)^{12}$$

Si en vez de componer el interés mensual consideramos un interés compuesto diariamente, la anterior expresión pasa a ser

$$\left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365}$$

Fue esta observación fue la que llevó a Jacob Bernoulli (1683) a descubrir el número

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

que actualmente conocemos como e. Si hacemos tender a infinito el número de intervalos por año, la expresión anterior puede considerarse la definición de la función exponencial en términos de límites, debida a Euler:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}.$$

En general, las funciones exponenciales se caracterizan, como funciones de una variable real, por el hecho de que la tasa de crecimiento de estas funciones (es decir, su derivada) es directamente proporcional a su valor. La constante de proporcionalidad es, precisamente, el logaritmo neperiano de la base b. Esto es:

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \cdot \ln(b)$$

En la actualidad, la función exponencial $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ suele definirse mediante la siguiente serie de potencias:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots$$

Para finalizar este apartado debemos decir que la simplificación de los cálculos, como razón de ser histórica, no resulta un argumento totalmente satisfactorio en el aula por razones obvias de tipo tecnológico. Puede, sin embargo, aludirse a él como explicación que dé sentido a su introducción desde el punto de vista del desarrollo histórico de las matemáticas. Del mismo modo queda fuera de la discusión el problema relativo a la cuadratura de la hipérbola. Existen otros ejemplos que podrían mostrarse por su valor estético (uso de exponenciales y logaritmos en arquitectura, experimentos con la catenaria...), pero es necesario prescindir del rigor al mostrarlos, ya que muchas veces las técnicas que involucran se encuentran fuera del alcance de los alumnos. En todo caso, no debemos olvidar algunas tentativas para introducir los logaritmos desde un enfoque más cercano al dado por el desarrollo histórico. Es el caso de Gacharná (2015), quien plantea un propuesta didáctica basada en la regla de formación de la función logarítmica a partir de la relación $f(xy) = f(x) + f(y)$.

3. Diseño de problemas que se constituyen en razones de ser de los aspectos del objeto matemático a enseñar.

Hemos escogido cuatro problemas que pueden constituirse en razones de ser para la introducción de funciones logarítmicas y exponenciales. Éstos están diseñados, en primer lugar, para suscitar preguntas entre el alumnado cuya respuesta lleve, de modo natural, a la justificación del estudio de los nuevos objetos matemáticos que queremos introducir. Posteriormente se trabajarán problemas similares a los planteados inicialmente, de forma que pueda comprobarse si los alumnos han comprendido las bases que subyacen al modelo estudiado al principio. A continuación se presentan los enunciados de cada uno de los problemas.

3.1. El método del Carbono 14.

Se plantea a los alumnos el siguiente problema:

"Quizá te hayas preguntado alguna vez cómo es posible que los científicos puedan calcular la antigüedad de restos encontrados en excavaciones arqueológicas. Existen varias herramientas para ello, pero una de las más utilizadas es la *técnica del Carbono 14*. La técnica del Carbono 14 para fechar sustancias de gran antigüedad se basa en conocer el ritmo de desintegración de las partículas de este isótopo radiactivo químicamente inestable dentro de una muestra. Se sabe que, cada 5 600 años, *la mitad* de las partículas de Carbono 14 presentes en una muestra dada se desintegran.

El equipo de paleoantropólogos que trabajan en el yacimiento de las cuevas de Altamira (Cantabria) ha encontrado un fémur que podría utilizarse para calcular en qué momento se habitaron dichas cuevas. El equipo de biólogos ha estimado que la cantidad de Carbono 14 presente en el fémur de un ser humano vivo es de 2 mg. Por otro lado, el análisis de la pieza hallada ha revelado que en ella hay, actualmente, $0,25$ mg de Carbono 14. ¿Qué antigüedad tiene el fémur hallado?"

3.2. Cálculo del interés compuesto.

Se plantea a los alumnos el siguiente problema:

"Nos gustaría abrir un canal de Youtube para subir gameplays, por lo que necesitamos comprar un ordenador potente que pueda soportar requerimientos técnicos exigentes. Nuestro objetivo es comprar un ordenador portátil de alta gama, cuyo precio es 1 849 €. Como en este momento sólo tenemos 900 € ahorrados, hemos pensado en la idea de meter nuestro dinero en el banco.

La oferta que nos hacen es un depósito a plazo fijo de 6 meses con un interés del $0,10\,\%$. Esto quiere decir que, por cada 100 € invertidos, al cabo de 6 meses el banco nos ingresará $0,10$ € en nuestra cuenta. Si aceptamos esta oferta, ¿cuánto tiempo pasará hasta tener el dinero necesario para comprar el ordenador portátil e iniciar nuestra carrera como Youtubers?"

3.3. Decibelios y logaritmos.

Se plantea a los alumnos el siguiente problema:

"El *decibelio* es la medida utilizada para expresar el **nivel de potencia** y el **nivel de intensidad** del ruido, tal y como éste es percibido por un oyente. La variable w denota la potencia del ruido y $w_0 = 10^{-12}$ vatios/m^2 es el valor de referencia para el umbral de audición. En la siguiente tabla puedes observar ruidos emitidos a distintas potencias y su medida en decibelios:

Descripción del ruido	**Potencia del ruido**	**Valor en dB**
Umbral de audición	10^{-12} vatios/m^2	0 dB
Respiración tranquila	10^{-11} vatios/m^2	10 dB
Biblioteca	10^{-10} vatios/m^2	20 dB
Aspiradora	10^{-5} vatios/m^2	70 dB
Concierto	10^{-1} vatios/m^2	110 dB
Cohete en despegue	10^{6} vatios/m^2	180 dB
Bomba atómica de Hiroshima	10^{8} vatios/m^2	200 dB

a) ¿Sabrías dar una fórmula para calcular los decibelios en función de la potencia del ruido?

b) Supongamos que se emite un sonido con potencia $w = 5$ vatios/m^2. A continuación se emite un nuevo sonido, esta vez con potencia $w = 50$ vatios/m^2. ¿Cómo han aumentado los decibelios?

c) Supongamos que se emite un sonido con potencia $w = 5$ vatios/m^2. A continuación se emite un nuevo sonido, esta vez con potencia $w = 10$ vatios/m^2. ¿Cómo han aumentado los decibelios?

d) El nivel de intensidad del sonido de una conversación es de 40 dB aproximadamente. El nivel de intensidad del sonido de un concierto es de unos 120 dB. ¿Cuál es la relación entre la potencia de las fuentes sonoras?"

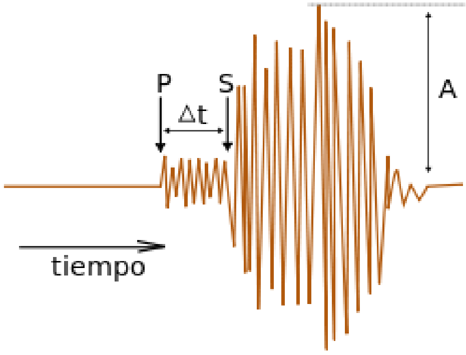
3.4. Escala sismológica de Richter.

Se plantea a los alumnos el siguiente problema:

"La *escala sismológica de Richter* es una escala que asigna un número para cuantificar la energía que libera un terremoto. Se usa para determinar las fuerzas de terremotos de una magnitud de entre $2,0$ y $6,9$ y de 0 a 400 km de profundidad, y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$M = \log A + 3 \cdot \log(8 \cdot \Delta t) - 2,92$$

donde A es la **amplitud de las ondas en milímetros**, tomada directamente en el sismograma, y Δt es el **tiempo en segundos** desde el inicio de las ondas **P** (primarias) al de las ondas **S** (secundarias).



La relación entre la magnitud M en la escala de Richter y la energía E (medida en Julios, J) liberada por un terremoto es la siguiente:

$$\log E = 1,5M + 11,8$$

a) Se ha registrado un terremoto de magnitud 3 en la escala de Richter. ¿Cuál ha sido la energía liberada por el terremoto?

b) El sismógrafo detecta otro terremoto, esta vez de magnitud 6 en la escala de Richter. ¿Cuál ha sido la energía liberada?

c) ¿Qué relación hay entre la energía liberada por uno y otro terremoto? ¿Podemos decir que un terremoto de magnitud 6 es el doble de energético que un terremoto de magnitud 3?”

Respecto al problema de la escala sismológica de Richter, hay que tener en cuenta que los alumnos deben estar ya familiarizados con el concepto de logaritmo por haber sido introducido en los problemas 3.2 y 3.3. El problema está diseñado ante todo para mostrar una situación científica que puede analizarse utilizando logaritmos, así como para deshacer la creencia común de que un terremoto de magnitud doble que otro es el doble de energético que éste.

La secuencia didáctica diseñada para desarrollar el primero de estos problemas (Método del Carbono 14) se detalla en el siguiente apartado.

4. Metodología de la implementación en el aula.

En líneas generales, los cuatro problemas planteados tienen como característica esencial el plantear un problema cuya resolución es difícil o imposible utilizando las técnicas vistas hasta el momento. Por ello, los problemas se analizan en dos fases:

1. **Fase de motivación:** en esta fase se presenta el problema, en la línea de una pregunta generadora, pero que plantea objetivos más concretos. Es crucial que

el enunciado del problema atraiga la atención de los alumnos en la medida de lo posible, y que éste no pueda resolverse por otros medios distintos a aquellos que involucran el objeto matemático a introducir. Incluso en el caso de que pueda darse una solución "a ojo", debe quedar clara la posibilidad de que existan problemas con enunciados totalmente análogos pero cuyos datos iniciales hagan imposible el resolverlos de este modo. El objetivo de esta fase es que los alumnos vean la necesidad de introducir nuevas técnicas para resolver el problema planteado, que por lo general quedará irresoluto.

2. **Fase de resolución:** una vez vistas las técnicas necesarias, se volverá a considerar el problema planteado inicialmente. Es ahora cuando se aplicará lo estudiado para resolverlo, finalizando así la exposición del problema. Es conveniente introducir en este punto algunas variantes que expongan limitaciones de las técnicas vistas, si las hubiera, o problemas relacionados que sirvan como germen del desarrollo de técnicas posteriores.

Exponemos a continuación el problema 1 (método del Carbono 14) como ejemplo para ilustrar la metodología a seguir:

Inicialmente pueden plantearse a los alumnos preguntas acerca de si conocen o no alguna técnica para fechar sustancias de gran antigüedad. Dado que el método del Carbono 14 aparece con cierta frecuencia (es nombrado en series de televisión, en los informativos...) no es descabellado suponer que algunos de los alumnos conozcan el nombre de esta técnica. Puede que haya sido mencionada también en clase de química. Para abordar este problema, intentaremos generar en primer lugar un debate controlado para hallar un modelo que permita organizar adecuadamente los datos presentes en el enunciado. La lectura atenta y detallada del problema, guiada por el profesor, es fundamental en esta fase. Algunas de las preguntas que pueden plantearse son:

- ¿Cuántos miligramos de Carbono 14 tenía el fémur hallado cuando formaba parte de un ser humano vivo?

Respuesta: el equipo de biólogos ha estimado que en el fémur de un ser humano vivo hay 2 mg de Carbono 14. Por tanto, en el momento en que su portador habitó la cueva, había 2 mg de Carbono 14 en el fémur.

- ¿Cuántos miligramos de Carbono 14 habría en la muestra después de 5 600 años?

Respuesta: sabemos que, cada 5 600 años, la mitad de las partículas de Carbono 14 presentes en una muestra se desintegran. Por tanto, después de 5 600 años, debería haber

$$2 \text{ mg} \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ mg de Carbono 14}$$

- ¿Cuántos miligramos de Carbono 14 habría en la muestra después de 11 200 años?

Respuesta: al pasar otros 5 600 años, la mitad de las partículas que quedan en la muestra vuelven a desintegrarse. Por tanto, después de 11 200 años, debería haber

$$1 \text{ mg} \cdot \frac{1}{2} = 0,5 \text{ mg de Carbono 14}$$

En este punto, es útil reflexionar si existe alguna manera de dar una fórmula general que nos permita conocer la cantidad de Carbono 14 presente en el fémur en función de periodos de 5 600 años. Hasta ahora, podemos decir que, para dos periodos de 5 600 años, la cantidad de Carbono 14 que se encuentra en la muestra puede calcularse como

$$2 \text{ mg} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,5 \text{ mg de Carbono 14}$$

Por lo tanto, podemos pensar que pasados p periodos de 5 600 años, la fórmula para calcular la cantidad de Carbono 14 presente en una muestra se exprese como:

$$C(p) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

Finalmente, como en un periodo de 5 600 años hay precisamente 5 600 años, podemos expresar la fórmula anterior en estos términos, utilizando una regla de 3:

$$C(t) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,600}}$$

Una vez solucionado el problema de hallar un modelo que exprese las relaciones establecidas en el enunciado, podemos utilizar herramientas gráficas, como GeoGebra, para representar la curva que sigue la cantidad de Carbono 14 presente en el fémur. Aquí pueden plantearse numerosas cuestiones que son de interés para el estudio de funciones, como por ejemplo: ¿Tiene sentido que la función decrezca? ¿Cuál es su dominio? ¿Tiene sentido definirla para valores de t menores que 0 en el contexto de nuestro problema?

Tras esta discusión llega un momento delicado de la exposición: establecer la ecuación que nos permita obtener el resultado pedido en el enunciado. Para ello, puede ser conveniente guiar a los alumnos con las preguntas:

- ¿Qué dato nos da el problema en el enunciado? ¿Qué nos pide?

Nuestro problema consiste ahora en determinar el valor de t para el cual $C(t) = 0,25$. Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$0,25 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 600}}$$

O bien, pasando el 2 al otro lado,

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 600}}$$

A partir de aquí, es fácil deducir que $t/5\,600$ debe ser igual a 3, con lo que $t = 3 \cdot 5\,600 = 16\,800$ años. En conclusión, el fémur hallado tiene una antigüedad de $16\,800$ años.

Una vez resuelto el problema, es necesario reflexionar con los estudiantes sobre las razones por las que nos ha resultado más o menos sencillo hallar la solución. ¿Qué dificultades habríamos encontrado si nos hubieran dado otros datos? ¿Habría sido tan fácil encontrar el valor de t si nuestra ecuación hubiera sido, por ejemplo,

$$\frac{1}{37} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 600}}?$$

En último lugar puede preguntarse "¿qué necesitamos calcular para resolver un problema de este tipo?" La respuesta es: debemos calcular el exponente al que hay que elevar cierto número para obtener otro número dado.

La justificación de esta necesidad, una vez planteados uno o más problemas como el descrito, nos lleva a dar una definición del concepto de logaritmo de un número en una base arbitraria. El desarrollo de las propiedades fundamentales del logaritmo, muy especialmente la de transformar exponentes en factores, permitirá una revisión de este tipo de problemas, para cuya resolución dispondremos de un abanico de técnicas más precisas y eficaces. Así, por ejemplo, el problema dedicado al cálculo del interés compuesto está planteado de forma que el resultado de la ecuación a resolver no pueda ser estimado fácilmente probando con números enteros sencillos.

E. Sobre el campo de problemas.

1. Diseño de los distintos tipos de problemas a presentar.

El campo de problemas del que emergen los objetos matemáticos a tratar en la secuencia didáctica pueden reusmirse como sigue. Tomamos como referencia los textos de de Lucas y cols. (2016) y Vizmanos y cols. (2009).

- **CP1. Campo de problemas asociados al manejo de logaritmos.**

  ✧ CP1.1. *Dadas distintas sucesiones de números, calcular mediante la definición de logaritmo la sucesión dada por los logaritmos de dichos números y construir una tabla de valores relacionando cada pareja de valores.*

  Este problema permite observar aspectos básicos relacionados con los logaritmos, ya que familiariza a los estudiantes con propiedades del tipo $\log_b b = 1$ ó $\log_b 1 = 0$. También sirve para practicar la construcción de tablas de valores, allanando el camino para representar la función logarítmica.

  ✧ CP1.2. *Dados dos números x, y, comparar el resultado de calcular* $\log(x) + \log(y)$ *con el de calcular* $\log(x \cdot y)$.

  Mediante este problema comienzan a aparecer las propiedades algebraicas de los logaritmos, las cuales relacionan productos con sumas.

  ✧ CP1.3. *Dados dos números x, y, comparar el resultado de calcular* $\log(x) - \log(y)$ *con el de calcular* $\log\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

  Este problema, análogo al anterior, permite comprobar numéricamente cómo el logaritmo relaciona cocientes con restas.

  ✧ CP1.4. *Dada una sucesión de números en progresión geométrica, establecer la progresión que sigue la sucesión dada por los logaritmos de dichos números.*

  Este problema, mediante experimentación numérica con ayuda de la calculadora, permite a los alumnos identificar cómo el uso de logaritmos transforma potencias en factores.

- **CP2. Campo de problemas asociados al manejo de funciones exponenciales.**

  ✧ CP2.1. *Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una función exponencial que permita modelizar diversos problemas científicos o de la vida cotidiana.*

La interpretación de problemas y su modelización mediante funciones de tipo exponencial es un aspecto clave para la comprensión de este objeto matemático, y está estrechamente ligada con el planteamiento de los problemas que se constituyen en razones de ser del mismo.

✧ CP2.2. *Dada una función de la forma $f(x) = a^x$, construir una tabla de valores y representarla gráficamente de manera aproximada.*

Este problema es el más básico de los que tienen que ver con la representación gráfica de funciones exponenciales, y sobre él se apoyan los siguientes.

✧ CP2.3. *Dada una función de la forma $f(x) = a^x$, determinar su dominio y recorrido, analizar el crecimiento y decrecimiento de la función, calcular sus extremos relativos (si los tiene) e identificar la asíntota horizontal.*

Este es el problema más frecuente en el estudio de funciones exponenciales. Su resolución debería facilitarse gracias al estudio previo de los aspectos básicos de funciones, desarrollados previamente.

✧ CP2.4. *Dada una función de la forma $f(x) = a^x$ mediante su representación gráfica, construir la gráfica de la función $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, identificando la relación de simetría entre ambas gráficas.*

Aquí entran en juego las técnicas desarrolladas en CP2.2, combinadas con un manejo básico de los conceptos relacionados con la simetría.

- **CP3. Campo de problemas asociados al manejo de funciones logarítmicas.**

✧ CP3.1. *Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una función logarítmica que permita modelizar diversos problemas científicos o de la vida cotidiana.*

Al igual que sucede con CP2.1, el uso de funciones logarítmicas para interpretar problemas científicos y cotidianos es esencial a la hora de construir aprendizajes significativos de este objeto matemático.

✧ CP3.2. *Dada una función de la forma $f(x) = \log_a(x)$, construir una tabla de valores y representarla gráficamente de manera aproximada.*

Este problema es el más básico de los que tienen que ver con la representación gráfica de funciones logarítmicas, análogo al antes expuesto.

✧ CP3.3. *Dada una función de la forma $f(x) = \log_a(x)$, determinar su dominio y recorrido, analizar el crecimiento y decrecimiento de la función, calcular sus extremos relativos (si los tiene) e identificar la asíntota vertical.*

Problema análogo a CP2.3. Este problema puede utilizarse en combinación con CP1.1 para estudiar la imposibilidad de definir el logaritmo de un número menor o igual que 0.

✧ CP3.4. *Dada una función de la forma $f(x) = \log_a(x)$ mediante su representación gráfica, construir la gráfica de la función $g(x) = \log_{1/a}(x)$, identificando la relación de simetría entre ambas gráficas.*

Problema análogo a CP2.4. Es interesante resolverlo tanto gráficamente como algebraicamente, apoyándose en la técnica de cambio de base.

- **CP4. Campo de problemas asociados a la resolución de ecuaciones exponenciales.**

✧ CP4.1. *Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una expresión algebraica con indeterminadas en uno o más exponentes.*

✧ CP4.2. *Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b$, utilizando la definición o expresando b como potencia de a e identificando exponentes.*

Estos problemas son interesantes para practicar las definiciones y conseguir que los alumnos se familiaricen con las primeras técnicas trabajadas.

✧ CP4.3 *Resolver problemas en los que intervienen ecuaciones exponenciales de la forma $F(a^x) = 0$, con $F(x)$ un polinomio, mediante la técnica de cambio de variable.*

No es necesario hacer mucho hincapié en este tipo de problemas, ya que están más orientados a practicar la técnica de cambio de variable que al manejo de exponenciales.

✧ CP4.4. *Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b$, utilizando los logaritmos y sus propiedades.*

Éste es el problema clave de la unidad didáctica, y aparece en prácticamente todos los problemas contextualizados. Debe prestarse atención para diseñarlo de forma que se observe la imposibilidad de resolverlo utilizando las técnicas vistas en CP4.2. Así mismo, es muy conveniente fundamentar la expresión “aplicar logaritmos” de manera adecuada; por ejemplo, apoyándose sobre las propiedades del logaritmo como función inyectiva.

- **CP5. Campo de problemas asociados a la resolución de ecuaciones logarítmicas.**

- ✧ CP5.1. *Identificar, a partir de un enunciado, la traducción matemática del mismo mediante una expresión algebraica en la que la incógnita aparece como argumento de un logaritmo.*
- ✧ CP5.2. *Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones logarítmicas de la forma* $\log_a(f(x)) = b$*, utilizando la definición de logaritmo.*

  Este campo de problemas es fundamental en la resolución de problemas contextualizados que aparecen como razón de ser, como vemos en el caso del problema de la escala de Richter o el de los decibelios.
- ✧ CP5.3. *Resolver problemas (contextualizados o no) en los que intervienen ecuaciones logarítmicas de la forma* $\log_a(f(x)) = \log_a(b)$*, identificando los argumentos.*
- ✧ CP5.4. *Determinar la relación entre la variación de los argumentos de la función logarítmica y la de sus imágenes, observando su carácter no lineal.*

  Este problema es la base de muchos problemas contextualizados de aplicación a situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, justifica la observación de que un terremoto de magnitud doble en la escala de Richter que otro no es el doble de energético, sino varios órdenes de magnitud más.

- **CP6. Relación de inversión entre la función exponencial** $\mathbf{f(x) = a^x}$ **y la función logarítmica** $\mathbf{g(x) = \log_a(x)}$**.**

  Este campo de problemas permite inicar una discusión más general acerca de los conceptos de función inversa o recíproca, composición de funciones, etc. que se estudiarán con más detalle en cursos sucesivos. También permite utilizar el criterio gráfico de determinación de una función inversa mediante la observación de la simetría de las gráficas de las funciones respecto de la bisectriz del primer cuadrante. De este modo, el aprendizaje de la relación existente entre la función exponencial y la logarítmica permite dar un modelo distinto para explicar la relación entre la exponencial y el logaritmo, enunciada desde una perspectiva algebraica.

2. Modificaciones de la técnica inicial.

Dado que es el campo de problemas el que sirve como fundamento a la exposición de las técnicas, éstas pueden verse como "hechas a medida" para adaptarse a las situaciones descritas por aquellos. Sin embargo, podemos señalar la aparición de técnicas a lo largo de la exposición docente que son superadas *a posteriori* por la introducción de otras más potentes. Así, por ejemplo, la técnica que permite resolver ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = a^c$ por identificación de exponentes queda subsumida en la técnica general que resuelve ecuaciones de la forma $a^{f(x)} = b$ mediante el uso de logaritmos.

Si comparamos los objetivos expuestos en CP1.1 y CP1.4 con los planteados por CP5.4, observaremos que, más que una modificación de la técnica inicial, es importante llevar a cabo una modificación del planteamiento de los problemas propuestos. Mientras que los problemas asociados al manejo de logaritmos tienen como objetivo desarrollar una noción intuitiva de las transformaciones algebraicas que permiten estos objetos matemáticos, los problemas contextualizados pretenden descubrir estas propiedades reinterpretándolas en el análisis de situaciones procedentes del ámbito científico. En cualquier caso, somos conscientes de que, en el contexto del aula, resulta difícil diseñar experimentos que justifiquen la introducción de escalas logarítmicas. Problemas introductorios como el de de Lucas y cols. (2016), mencionado en el apartado 1 de la sección B, tampoco permiten subsanar esta dificultad.

En la línea de lo comentado en la sección 3, debemos ser cuidadosos a la hora de exponer las limitaciones de las técnicas expuestas y trabajadas por los distintos campos de problemas. Muchas veces los alumnos esperan de una técnica que dé una solución final a todos los posibles problemas propuestos en el aula. Esto condiciona la aparición de obstáculos en el aprendizaje, derivados de la concepción errónea de que las técnicas vistas en clase son suficientes para abordar cualquier tipo de problema relacionado con los objetos matemáticos estudiados. El caso de la resolución de ecuaciones exponenciales por cambio de variable es paradigmático de esta situación.

Por último, merece la pena considerar distintas transformaciones efectuadas sobre funciones exponenciales y logarítmicas en el marco de la introducción al estudio de funciones, como traslaciones verticales u horizontales. Puede plantearse cómo cambian las técnicas utilizadas en el estudio de dichas funciones al estudiar, por ejemplo, la gráfica de $f(x) = \log_a(x) + c$, o la de $g(x) = \log_a(x - c)$. El uso de GeoGebra es de especial importancia en este punto, ya que dinamiza la exposición y permite generar con rapidez un amplio abanico de ejemplos. Además, las traslaciones horizontales permiten abrir una discusión acerca de las condiciones que debe cumplir el dominio de una función de la forma $g(x) = \log_a \big(f(x)\big)$, la cual es crucial en cursos posteriores.

3. Metodología utilizada en la implementación en el aula.

En el apartado 1 de la sección B señalábamos un rasgo distintivo del enfoque algebraico en la exposición del logaritmo que es característico de muchos ámbitos en la enseñanza tradicional de las matemáticas: la ausencia de una praxeología en la que el objeto matemático a estudiar se introduzca justificándolo a través de una necesidad, interna o externa a las matemáticas, que las técnicas aprendidas hasta la fecha no permiten resolver.

A esta carencia hemos aludido mediante constatación del "carácter cíclico" que presenta la exposición tradicional de los contenidos: en primer lugar se introducen, de manera formal, las técnicas; en segundo lugar, se plantea una amplia batería de ejercicios y problemas que deben resolverse utilizando las técnicas previamente mostradas. El carácter cíclico aparece al preguntarse por qué se han aprendido las técnicas: dado el carácter *ad hoc* de los problemas planteados, la única explicación es que las técnicas trabajadas en clase no tienen otra justificación que la de poder resolver adecuadamente aquellos.

En contraposición a este modelo, planteamos introducir los problemas como preguntas generadoras que formen el germen de una investigación posterior. Para ello, y huyendo de la dinámica de clases magistrales, nos apoyaremos en la interacción con el alumnado a lo largo de todo el proceso de resolución del problema. Se espera que los alumnos sean capaces, por sí mismos, de construir poco a poco el problema a partir de la resolución por partes de cuestiones, más sencillas, planteadas por el docente. Como consecuencia de lo anterior, tanto los modelos matemáticos que surjan como las técnicas necesarias para resolverlos deben aparecer de la manera más natural posible. Dicho esto, somos conscientes de que los problemas seleccionados han de llamar la atención de los alumnos, por lo que es conveniente redactar enunciados atractivos que fomenten su curiosidad. En este sentido, pretendemos alejarnos del modelo del problema artifical "hecho a medida de las técnicas": antes bien, los datos deben ser verosímiles y adecuarse, en la medida de lo posible, al planteamiento real de la cuestión.

En segundo lugar, debemos tratar de que los alumnos adquieran aprendizajes significativos. Sin prescindir de la necesaria dosis de rigor aportada por las demostraciones formales (aunque sencillas) que suelen aparecer en esta unidad didáctica, consideramos esencial que los alumnos realicen varios experimentos numéricos con ayuda de la calculadora para ir descubriendo por sí mismos las propiedades algebraicas de los logaritmos. En particular, las observaciones relativas a la transformación de progresiones geométricas en progresiones aritméticas es considerada imprescindible, por ser ésta una de las características fundamentales del logaritmo. Varios problemas están, por tanto, dedicados al desarrollo de este tipo de experiencias, las cuales pueden ser llevadas a cabo tanto de forma individual como por grupos.

Por último, y en la línea sugerida por Ferrari y Farfán (2010) y Gacharná (2015), consideramos crucial la incorporación de una *red de modelos* que permita un enfoque cohesionado del proceso de enseñanza-aprendizaje del manejo con logaritmos y potencias: por este motivo prescindiremos de la delimitación habitual, que separa los aspectos algebraicos y analíticos a tratar, sustituyéndola por una exposición que aúne todos estos aspectos. De este modo esperamos que nuestra exposición permita ofrecer tecnologías distintas para una misma técnica, así como aportar ejemplos más enriquecedores y variados, evitando que los alumnos disocien aspectos tratados por las sucesivas unidades didácticas. Mediante esta reordenación, además, nuestro modelo pretende superar los problemas habituales derivados del olvido de las técnicas algebraicas que se aprenden durante el primer cuatrimestre.

En definitiva, el modelo que planteamos lleva consigo unas necesidades metodológicas basadas en los siguientes aspectos:

1. Planteamiento de **problemas atractivos y verosímiles**, sacados de contextos científicos o de la vida cotidiana, que puedan interesar a los alumnos y que justifiquen las técnicas introducidas (razón de ser).

2. Interacción continua y **descubrimiento guiado** por el profesor a la hora de llevar a cabo la resolución de los problemas planteados.

3. **Experimentación numérica** llevada a cabo de forma **autónoma** por el alumno, complementada mediante el desarrollo de razonamientos formales sencillos.

4. **Integración del enfoque algebraico y el analítico**, permitiendo hacer uso de ambos a la hora de exponer las tecnologías que justifican la resolución de los problemas.

En cuanto a los recursos necesarios, podemos señalar la necesidad de utilizar calculadoras para realizar diversos experimentos numéricos. Consideramos también muy conveniente el uso de GeoGebra en el aula, tanto por parte del profesor como de los alumnos, de forma que éstos puedan familiarizarse con la representación gráfica de funciones, así como la observación de las características que éstas presentan (simetría, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, etc.)

F. Sobre las técnicas.

Detallamos a continuación las técnicas expuestas en la secuencia didáctica. Advertimos al lector que la división efectuada de los contenidos se da únicamente por motivos de claridad en la exposición: en la práctica, las técnicas correspondientes al estudio de logaritmos deben complementarse con las asociadas al estudio de funciones logarítmicas, exponiendo ambos modelos simultáneamente. Señalaremos esta complementariedad explícitamente a lo largo del apartado.

Tomamos nuevamente como referencia los textos de de Lucas y cols. (2016) y Vizmanos y cols. (2009).

- T0. Repaso: técnicas asociadas al manejo de potencias.

  ✧ T0.1. Producto de potencias de la misma base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

  ✧ T0.2. Cociente de potencias de la misma base: $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

  ✧ T0.3. Potencia de exponente 0: $a^0 = 1$ para todo número a.

  ✧ T0.4. Potencia de un producto: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

  ✧ T0.5. Potencia de un cociente: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

  ✧ T0.6. Potencia de una potencia: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

  ✧ T0.7. Si $a > 0$, entonces $a^x > 0$ para todo número real x.

Las técnicas anteriores no son objeto específico de la unidad didáctica que desarrollamos. Hemos decidido indicarlas explícitamente por su importancia en la fundamentación de las tecnologías necesarias para justificar los siguientes resultados, que sí se trabajan. Por este motivo, consideramos muy conveniente realizar una evaluación inicial a comienzo de curso para comprobar el grado de familiaridad de los alumnos con las técnicas anteriores.

- T1. Técnicas asociadas al manejo de logaritmos.

  ✧ T1.1. Propiedad fundamental del logaritmo: $\log_a(x) = y \Longleftrightarrow a^y = x$.

  Esta técnica, que no consiste en otra cosa que que desarrollar simbólicamente la definición de logaritmo, resulta crucial en todo lo que sigue. Por su aplicación a la hora de realizar problemas y de justificar propiedades, es muy necesario insistir en ella y trabajar concienzudamente todos los objetos involucrados, aclarando cuál es el significado de cada uno. Es conveniente también retomarla a la hora de explicar la relación entre la función logarítmica y la función exponencial.

- ✧ T1.2. Logaritmo de 1: $\log_a(1) = 0$ para toda base a.

  Técnica complementada con T3.1 y apoyada por la experimentación numérica.

- ✧ T1.3. Logaritmo de un producto: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

  Técnica apoyada por la experimentación numérica.

- ✧ T1.4. Logaritmo de un cociente: $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

  Técnica apoyada por la experimentación numérica. Utilizada también para redescubrir T1.2.

- ✧ T1.5. Logaritmo de una potencia: $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$.

  Técnica crucial en la resolución de ecuaciones exponenciales. Es conveniente insistir en la transformación de productos en sumas, también quizá detallando la notación utilizada para lograr mayor efecto, como se muestra a continuación:

$$\log_a(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{p veces}}) = \underbrace{\log_a(x) + \log_a(x) + \ldots + \log_a(x)}_{\text{p veces}}$$

- ✧ T1.6. Técnica de cambio de base: $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

  No creemos necesario insistir demasiado en su demostración formal, pero debería exponerse en todo caso. Puede apoyarse también en la representación gráfica de las funciones $f(x) = \log_a(x)$, $g(x) = \log_b(x)$ y $h(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ con ayuda de GeoGebra.

- ✧ T1.7. Relación entre $\log_a(x)$ y $\log_{1/a}(x)$.

  Técnica complementada con T3.1 y apoyada por la experimentación numérica. Es conveniente utilizar simultáneamente el enfoque algebraico (utilizando, por ejemplo, la fórmula de cambio de base) y el analítico (basado en consideraciones de simetría de gráficas).

- T2. Técnicas asociadas a las funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$.

  - ✧ T2.1. Confección de una tabla de valores para $f(x) = a^x$.

    Técnica para la que se requiere uso de la calculadora. Es conveniente establecer convenios sobre redondeo y uso de notación fraccionaria o decimal.

  - ✧ T2.2. Propiedad de ser función: *si* $x = y$, *entonces* $a^x = a^y$.

    Técnica basada en la observación la representación gráfica.

  - ✧ T2.3. Propiedad inyectiva: *si* $a^x = a^y$, *entonces* $x = y$.

    Puede apoyarse también en la observación de la representación gráfica. Se complementa de manera esencial con T5.1 para resolver ecuaciones exponenciales por identificación de exponentes.

- ✧ T2.4. Técnica de cálculo del dominio de la función exponencial.

  Se limita a señalar que, para $f(x) = a^x$, Dom $f(x) = \mathbb{R}$. Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica y consideraciones algebraicas.

- ✧ T2.5. Técnica de cálculo del recorrido de la función exponencial.

  Se limita a señalar que, para $f(x) = a^x$, Rec $f(x) = \mathbb{R}^+$. Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica y consideraciones algebraicas relacionadas con T0.7.

- ✧ T2.6. Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función exponencial.

  - T2.6.1. *Caso* $0 < a < 1$*: la función es estrictamente decreciente.*
  - T2.6.2. *Caso* $a > 1$*: la función es estrictamente creciente.*

  Destacamos la importancia de insistir en el rápido crecimiento/decrecimiento de la función exponencial. Es conveniente también señalar aquí la simetría de las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, utilizando GeoGebra para representar varios ejemplos de pares de funciones para distintos valores de a.

- ✧ T2.7. Cálculo de los extremos relativos de la función exponencial.

  Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica. Debe razonarse la relación entre esta propiedad y la propiedad de ser estrictamente creciente o decreciente, con Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

- ✧ T2.7. Técnica de identificación de la asíntota horizontal en la función exponencial.

  Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica, complementada con comentarios desde el enfoque algebraico y experimentación numérica.

- T3. Técnicas asociadas a las funciones logarítmicas de la forma $f(x) = \log_a(x)$.

  - ✧ T3.1. Confección de una tabla de valores para $f(x) = \log_a(x)$.

    Técnica para la que se requiere uso de la calculadora.

  - ✧ T3.2. Propiedad de ser función: *si* $x = y$*, entonces* $\log_a(x) = \log_a(y)$.

    Técnica basada en la observación la representación gráfica. Se complementa de manera esencial con T5.3, ya que es necesaria para justificar adecuadamente la expresión "tomar logaritmos".

  - ✧ T3.3. Propiedad inyectiva: *si* $\log_a(x) = \log_a(y)$*, entonces* $x = y$.

    Puede apoyarse también en la observación de la representación gráfica. Se complementa de manera esencial con T6.1 para resolver ecuaciones logarítmicas por identificación de argumentos.

- ✧ T3.4. Técnica de cálculo del dominio de la función logarítmica.

  Se limita a señalar que, para $f(x) = \log_a(x)$, $\operatorname{Dom} f(x) = \mathbb{R}^+$. Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica y consideraciones algebraicas.

- ✧ T3.5. Técnica de cálculo del recorrido de la función logarítmica.

  Se limita a señalar que, para $f(x) = \log_a(x)$, $\operatorname{Rec} f(x) = \mathbb{R}$. Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica y experimentación numérica.

- ✧ T3.6. Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función logarítmica.

  - T3.6.1. Caso $0 < a < 1$: la función es estrictamente decreciente.
  - T3.6.2. Caso $a > 1$: la función es estrictamente creciente.

  Destacamos la importancia de insistir en el lento crecimiento/decrecimiento de la función logarítmica. Es conveniente también señalar aquí la simetría de las funciones $f(x) = \log_{1/a}(x)$ y $g(x) = \log_a(x)$, utilizando GeoGebra para representar distintos ejemplos de pares de funciones para distintos valores de a, y complementando nuestras observaciones con T1.7.

- ✧ T3.7. Cálculo de los extremos relativos de la función logarítmica.

  Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica. Debe razonarse la relación entre esta propiedad y la propiedad de ser estrictamente creciente o decreciente, con $\operatorname{Dom} f(x) = \mathbb{R}^+$.

- ✧ T3.8. Técnica de identificación de la asíntota vertical de la función logarítmica.

  Técnica apoyada en la observación de la representación gráfica, complementada con la experimentación numérica y T3.6.

- T4. Técnicas asociadas a la relación entre funciones exponenciales y logarítmicas.

  - ✧ T4.1. Criterio gráfico para la determinación de la función inversa.

    Dos funciones son inversas respecto de la composición si y sólo si sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Esta técnica se apoya en la representación gráfica de distintas funciones, utilizando GeoGebra como herramienta para generar ejemplos.

  - ✧ T4.2. Representación gráfica de una función inversa a partir de la gráfica de una función.

    No insistimos demasiado en la precisión de la representación obtenida. Basta comprobar que, cualitativamente, la gráfica de la función dibujada se ajusta a lo esperado.

- ✧ T4.3. Relación de inversión entre la función exponencial $f(x) = a^x$ y la función logarítmica $g(x) = \log_a(x)$.

  Es muy conveniente retomar aquí T1.1, verbalizándolo, para dar cualquier justificación formal. Nuestra experiencia limitada con los alumnos sugiere que un tratamiento formal de la composición puede ser contraproducente. En todo caso, esta técnica se complementa con T4.1 y T4.2, así como con distintos ejemplos construidos con ayuda de GeoGebra.

- T5. Técnicas asociadas a la resolución de ecuaciones exponenciales.

  - ✧ T5.1. Resolución de ec. exponenciales por identificación de exponentes.

    Para resolver ecuaciones exponenciales por identificación de exponentes, debe operarse con los dos miembros de la ecuación para llevarla a una de la forma
    $$a^{f(x)} = a^b$$
    donde $f(x)$ es una expresión algebraica en la indeterminada x. Una vez hecho esto, se resuelve la ecuación $f(x) = b$.

  - ✧ T5.2. Resolución de ec. exponenciales por cambio de variable.

    Para resolver ecuaciones exponenciales de la forma $F(a^x) = 0$, se procede de la manera siguiente: denotamos $t = a^x$ y resolvemos la ecuación $F(t) = 0$. Finalmente, para los valores de t obtenidos (tomamos, por ejemplo, $t = t_0$), resolvemos la ecuación $t_0 = a^x$ mediante T5.1 ó T5.3.

  - ✧ T5.3. Resolución de ec. exponenciales mediante el uso de logaritmos.

    Para resolver una ecuación exponencial mediante el uso de logaritmos, ésta debe llevarse primero a una ecuación de la forma $a^{f(x)} = b$. A continuación utilizamos T3.2 para deducir $\log a^{f(x)} = \log b$. La técnica T1.5 permite expresar esta igualdad como $f(x) \cdot \log a = \log b$, de donde despejamos $f(x) = \dfrac{\log b}{\log a}$, y resolvemos la ecuación resultante.

- T6. Técnicas asociadas a la resolución de ecuaciones logarítmicas.

  - ✧ T6.1. Resolución de ec. logarítmicas por la definición de logaritmo.
  - ✧ T6.2. Resolución de ec. logarítmicas por identificación de argumentos.

1. Diseño de los distintos tipos de ejercicios a presentar en el aula.

Los ejercicios, a diferencia de los problemas, están prioritariamente diseñados para practicar y afianzar las técnicas vistas en clase. Adicionalmente, los ejercicios pueden sacar a la luz dificultades o errores en la comprensión de los conceptos estudiados por el alumno, con el objetivo de que éstos puedan ser solventados y corregidos a tiempo. En último lugar, los ejercicios pueden diseñarse para llevar al límite las técnicas vistas en clase, de forma que los estudiantes deban plantearse las limitaciones de estas técnicas, así como sus posibles modificaciones para subsanar los problemas surgidos. En líneas generales, las hojas de ejercicios plantean aplicaciones directas de las técnicas vistas en clase, o bien pueden resolverse utilizando las definiciones dadas.

Ejercicios asociados a las técnicas de T1.

En primer lugar deben mencionarse los ejercicios más básicos, diseñados para practicar la definición de logaritmo, en los que se trabajan también propiedades de las potencias. En ellos se establecen ecuaciones muy sencillas, resueltas aplicando las definiciones:

Ejercicio T1.E1: halla x en los siguientes casos

a) $\log_x 36 = 2$

b) $\log_{27} x = \dfrac{1}{3}$

c) $\log_x \dfrac{1}{25} = -2$

Otro ejemplo que podemos proponer sería la siguiente actividad, diseñada para ejercitar las propiedades de las operaciones con logaritmos:

Ejercicio T1.E2: sabiendo que $\log 2 = 0,301030$ y que $\log 3 = 0,477121$, calcula, sin utilizar la calculadora, la siguiente expresión:

$$\frac{\log 20 + \log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log 5}$$

Otros ejercicios pueden plantearse como una manera de que los estudiantes experimenten y validen por sí mismos, con ayuda de la calculadora, las propiedades vistas en clase:

Ejercicio T1.E3: Calcula $\log 2$ y $\log 3$ con ayuda de la calculadora, y apunta el resultado con una precisión de tres cifras decimales.

a) Calcula $\log 6$ y apunta el resultado con una precisión de tres cifras decimales. ¿Qué relación observas entre las tres cantidades que has apuntado?

b) Calcula ahora $\log 5$. ¿Es cierto que $\log(2+3) = \log 2 + \log 3$?

c) ¿Cuánto vale $\log 1$? ¿Es cierto que $\log(3-2) = \log 3 - \log 2$?

Por lo general, se intentará que la complejidad operacional de los ejercicios no se convierta en un fin en sí mismo, sino que esté siempre supeditada a las necesidades del campo de problemas. No tendría mucho sentido, por ejemplo, insistir demasiado en ejercicios como el siguiente:

Ejercicio T1.E4: Halla x sabiendo que:

a) $\log x = 3 \cdot \log a + 2 \cdot \log b - \frac{1}{3} \cdot \Big(\log c + 5 \cdot \log d\Big)$

b) $\log x = \frac{1}{5} \cdot \Big(3 \cdot \log a - 2 \cdot \log b\Big) - 7 \cdot \Big(\log c + 4 \cdot \log d\Big)$

La razón estriba en que no hay ningún problema de los campos de problemas planteados cuya resolución haga surgir, de manera natural, la manipulación de expresiones como las anteriores.

En todo caso, no debe despreciarse plantear ejercicios en los que la manipulación de expresiones algebraicas sea pretendidamente compleja como un modo para que los alumnos se familiaricen y pierdan el miedo a realizar cálculos simbólicos de cierta dificultad. De igual modo, este tipo de ejercicios puede forzarles a recordar conceptos básicos como la jerarquía de operaciones, o la resolución de ecuaciones cuadráticas (y la discusión sobre soluciones válidas que ello conlleva). Ejemplos de ello serían los siguientes ejercicios:

Ejercicio T1.E5: Calcula

$$\log_3 3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}$$

Ejercicio T1.E6: Resuelve la ecuación

$$\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x - 1) = 1$$

Ejercicios asociados a las técnicas de T2.

En lo que respecta a los ejercicios relacionados con el estudio de funciones exponenciales, los más frecuentes están orientados a practicar la representación gráfica de dichas funciones mediante la construcción de una tabla de valores. Además, una vez representada, se pide estudiar las propiedades vistas en clase. (Determinación del dominio y del recorrido, crecimiento, extremos relativos y determinación de la asíntota horizontal.)

Ejercicio T2.E1: dadas las funciones

$$f(x) = 2^x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Anota cuál es su valor para distintos valores de x utilizando la calculadora y rellena la siguiente tabla. A continuación, representa gráficamente las funciones y compáralas.

Valor de x	Valor de $f(x)$	Valor de $g(x)$
$x = -3$		
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = 0$		
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 3$		

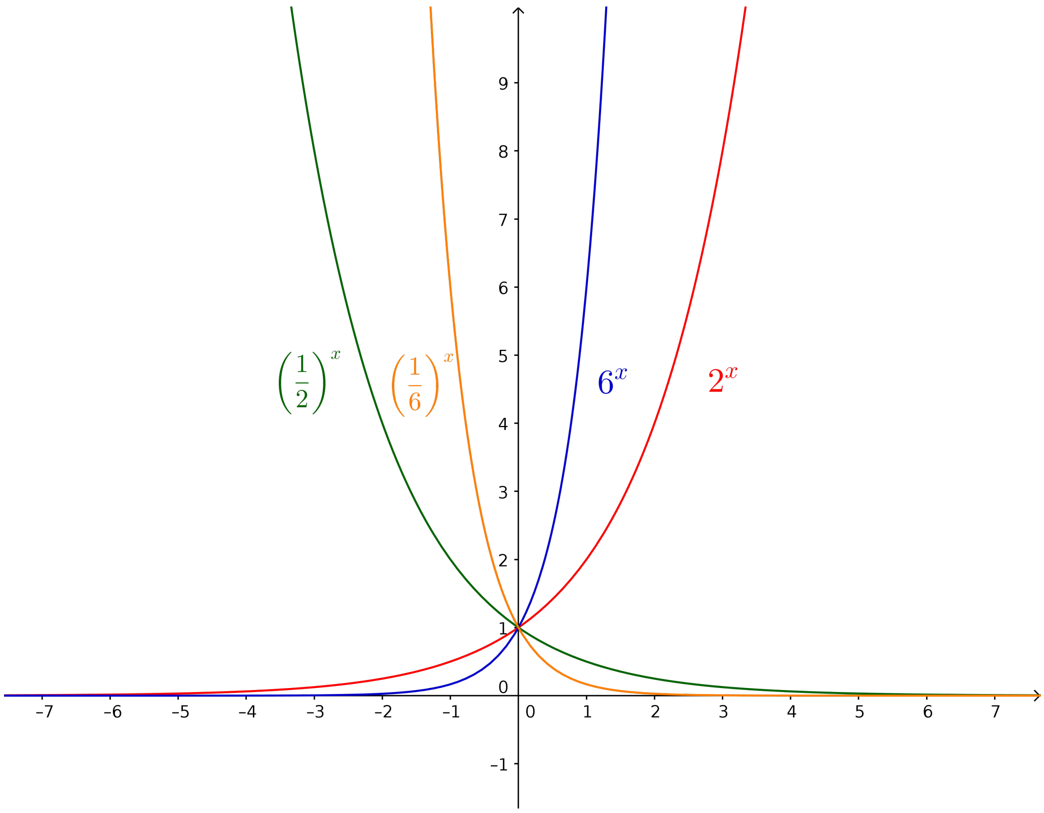
La resolución del ejercicio puede llevar a una discusión acerca de las propiedades de la función exponencial: ¿es siempre creciente? ¿es siempre decreciente? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido? ¿Para qué valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$?

Tras haber dejado que los alumnos rellenen la tabla con los valores correspondientes, puede ser conveniente representar gráficamente las funciones que aparecen en el ejercicio con la ayuda de GeoGebra. Además de las dos que se proponen, pueden representarse otras dos funciones exponenciales en la misma línea, como, por ejemplo:

$$f_1(x) = 6^x \quad \text{y} \quad g_1(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$$

Ahora deberían surgir, inevitablemente, preguntas que nos lleven a analizar qué semejanzas y diferencias se observan entre las funciones que hemos estudiado: ¿Qué tienen en común las funciones $f(x)$ y $f_1(x)$? ¿En qué se diferencian? ¿Qué tienen en común las funciones $g(x)$ y $g_1(x)$? ¿En qué se diferencian? ¿Hay alguna característica común a todas ellas?

Es también interesante, por último, traer a la memoria la función estudiada en el problema del Carbono 14. ¿A cuál de las funciones representadas debería parecerse más?



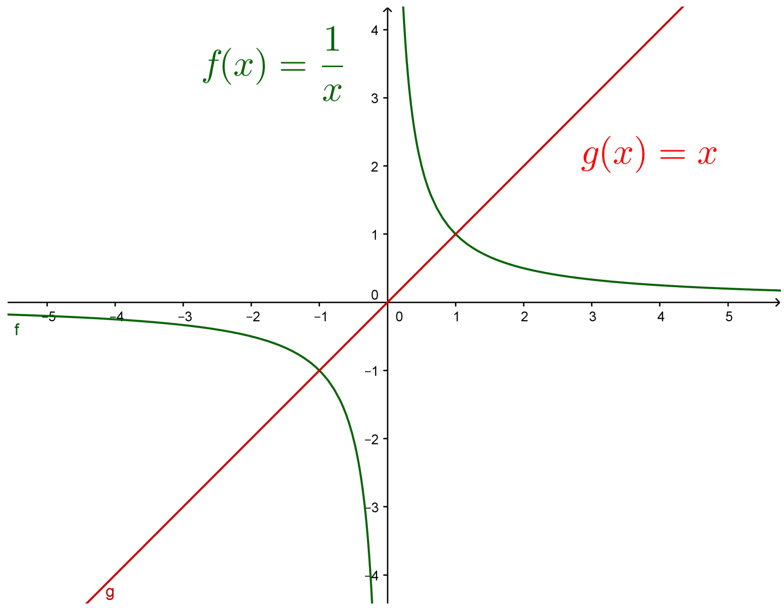
Ejercicios asociados a las técnicas de T3.

Estos ejercicios son análogos al anteriormente planteado, utilizando funciones logarítmicas en lugar de funciones exponenciales. Es interesante plantear también ejercicios en los que se representen, en los mismos ejes de coordenadas, funciones del tipo $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a(x)$. De este modo, los alumnos pueden ir familiarizándose con la observación de las propiedades de simetría trabajadas por las técnicas de T4.

Ejercicios asociados a las técnicas de T4.

Debido a la complejidad inherente a la representación gráfica de funciones, los ejercicios diseñados para la práctica de estas técnicas son, por lo general, más simples. Sin embargo, el uso de GeoGebra permite también proponer actividades a desarrollar por los alumnos en las que podemos manejar enunciados más complejos, así como una mayor variedad de ejemplos (ver apartado 2 de esta sección). Aunque no pertenecen a esta unidad didáctica, pueden practicarse también casos particulares en los que, al aplicar el criterio de simetría, obtenemos que la función inversa a la dada es ella misma:

Ejercicio T4.E1: determina, utilizando el criterio de simetría, la función inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Al ser la gráfica de la función simétrica respecto de la bisectriz del primer cuadrante, concluimos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es su propia inversa. Como nota metodológica, hay que insistir en que esta clase de ejercicios deben aparecer únicamente después de haber estudiado los casos generales, de forma que la particularidad de este caso no se convierta en un obstáculo didáctico.

Ejercicios asociados a las técnicas de T5 y T6.

Dado que las estas técnicas están orientadas a la resolución de distintos tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas, nuestra intención es ejercitarlas a través de la resolución de problemas contextualizados. Si bien pueden obtenerse fácilmente ecuaciones concretas descontextualizadas para afianzar las técnicas trabajadas en clase y mejorar la comprensión y la memorización de las mecánicas, esperamos tener que trabajar este tipo de ejercicios lo menos posible, dado que entendemos que los aprendizajes que facilitan son menos significativos.

2. Técnicas o modificaciones de una técnica introducidas con los ejercicios.

A lo largo de este trabajo hemos hecho alusión en repetidas ocasiones a la importancia de dar diversos modelos de un mismo objeto matemático. En el caso que nos ocupa, la posibilidad de representar gráficamente funciones exponenciales y logarítmicas es un recurso fundamental que no podemos olvidar. Para ello, es conveniente no sólo que el profesor se apoye en herramientas informáticas como GeoGebra, sino también que los alumnos aprendan algunos aspectos básicos de este software para que puedan adquirir autonomía en su uso, incorporando las posibilidades que ofrece a las demás técnicas vistas en clase.

Es por este motivo que hemos diseñado algunos ejercicios orientados al manejo de GeoGebra por parte de los alumnos, considerándolos como actividades que presentan modificaciones de las técnicas vistas en clase. Se pretende con ellos enseñar las herramientas básicas de representación de funciones para así poder dibujar y comparar distintas gráficas, aplicando las técnicas expuestas en clase. A continuación exponemos, a modo de ejemplo, dos de estos ejercicios:

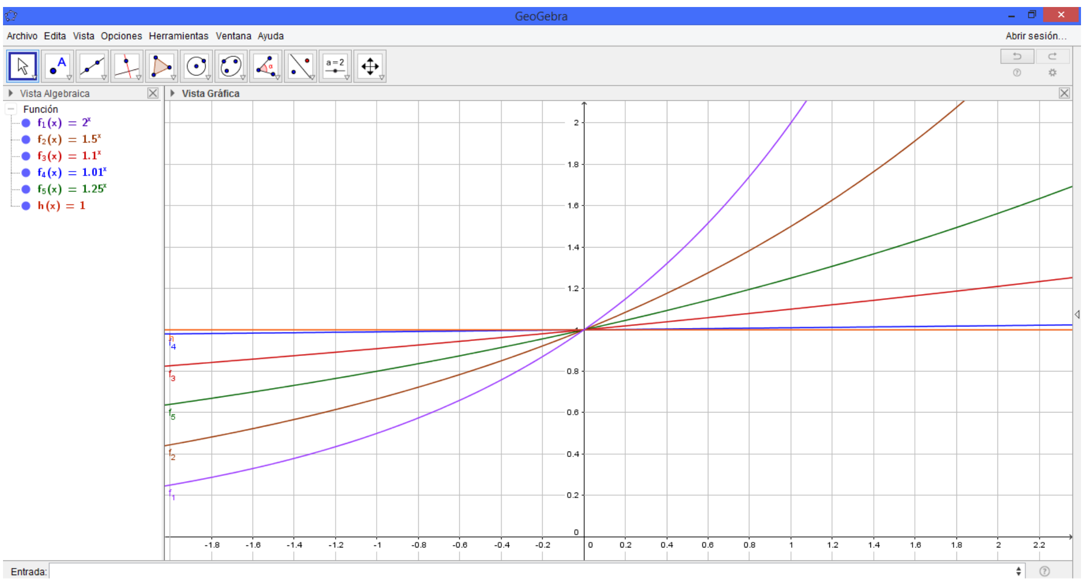
Ejercicio 1: representa en GeoGebra la función $f_1(x) = 2^x$. Para ello escribe, en el recuadro “`Entrada`”, el comando `f_1(x) = 2^x`. Representa también la función constante igual a 1, dada por $h(x) = 1$. Para ello escribe, en el recuadro “`Entrada`”, el comando `h(x) = 1`.

a) Representa la función $f_2(x) = (1,5)^x$. Para ello escribe, en el recuadro “`Entrada`”, el comando `f_2(x) = (1.5)^x`. **Cuidado:** recuerda que debes escribir punto en vez de coma para separar las cifras decimales.

b) ¿Qué aspectos tienen en común las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$? ¿En qué se diferencian?

c) Representa ahora las funciones $f_3(x) = (1,25)^x$, $f_4(x) = (1,1)^x$ y $f_5(x) = (1,01)^x$. Compara cada una de ellas con la función $h(x) = 1$. ¿Observas alguna relación entre el valor de la base y la semejanza de las funciones con la función constante igual a 1?

El ejercicio anterior está diseñado para observar el hecho de que, a medida que el valor de la base de una función exponencial tiende a 1, la función se va aproximando a la función constante igual a 1. En la pantalla de los alumnos debería aparecer un resultado similar al mostrado en la siguiente figura:



Ejercicio 2: representa en GeoGebra la función identidad, que denotaremos como $I(x) = x$. Para ello, puedes escribir en el recuadro "`Entrada`" el comando `I(x)` = `x`.

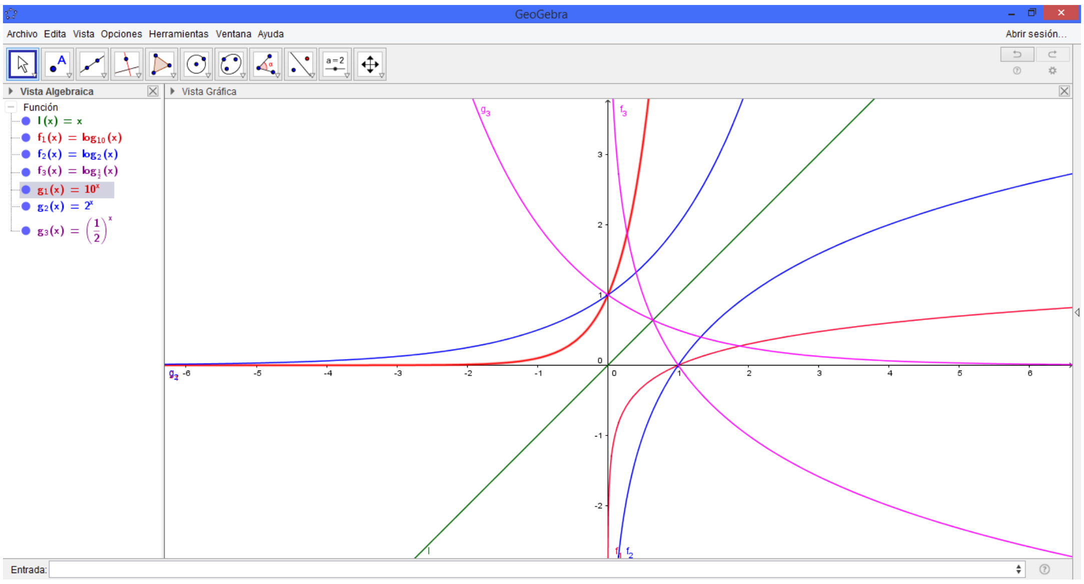
a) Representa las funciones $f_1(x) = \log(x)$ y $g_1(x) = 10^x$. ¿Observas alguna simetría entre las gráficas de estas funciones?

b) Pinta las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $g_1(x)$ del mismo color. **Nota:** para modificar el color de una gráfica, haz clic con el boton derecho del ratón sobre ella y selecciona la opción "Propiedades..." en la ventana desplegable. Una vez hecho esto, escoge el color que prefieras haciendo clic sobre él. A continuación, cierra la ventana "Preferencias".

c) Recuerda que el criterio de simetría nos permite determinar la inversa de una función dada. A continuación, representa las gráficas de las funciones $f_1(x) = \log_2(x)$, $f_2(x) = \log_{1/2}(x)$, $f_3(x) = 2^x$ y $f_4(x) = (1/2)^x$ y pinta del mismo color las parejas de funciones que sean **inversas entre sí**.

Nota: para representar el logaritmo en una base cualquiera puedes escribir, en el recuadro "`Entrada`", el comando `log(b, x)`. El número `b` denota la base del logaritmo. ¿Necesitas ver más claramente el dibujo? Puedes ocultar fácilmente la gráfica de una función haciendo clic sobre el **círculo azul** correspondiente a la función que quieras ocultar, situado en la barra lateral izquierda ("`Vista Algebraica`").

Este segundo ejercicio está planteado para que los alumnos practiquen el criterio de simetría para determinar funciones inversas. El resultado final podría ser similar al mostrado en la siguiente figura:



3. Idoneidad de las técnicas respecto al campo de problemas asociado.

Como hemos señalado en diferentes ocasiones a lo largo de esta exposición, nuestra propuesta está diseñada para introducir las técnicas necesarias para la resolución de los problemas que están constituidos como razón de ser del objeto matemático. Nuestra prioridad a la hora de diseñar los ejercicios es, siempre que sea posible, ceñirnos a la práctica de aquellas técnicas que contribuyen a la resolución de estos problemas.

Dicho esto, debemos admitir que resulta difícil prescindir de ejercicios mecánicos o de tipo algorítmico si pretendemos familiarizar a los alumnos con el manejo de las técnicas expuestas. Pensamos que ambas perspectivas no deben excluirse mutuamente, sino integrarse de modo que la proporción entre ambos tipos de actividades (ejercicios y problemas) sea equilibrada.

En cualquier caso, pensamos que las técnicas introducidas reflejan adecuadamente las necesidades impuestas por los problemas que hemos señalado como razones de ser: éstas requieren adquirir soltura en el manejo de expresiones algebraicas, el uso de la manipulación simbólica y la adquisición de nociones intuitivas respecto al comportamiento de las funciones exponenciales y logarítmicas que modelizan los problemas planteados. Finalmente, los enfoques algebraico y analítico permiten observar a través de distintos medios el tipo de transformaciones permitidas por logaritmos y exponenciales, así como su carácter no lineal.

4. Metodología utilizada en la implementación en el aula.

En primer lugar hay que señalar que los ejercicios están planteados para ser resueltos por el alumno como actividades individuales y de manera autónoma. Ello no obsta para dedicar varias sesiones a la corrección en común de estos ejercicios, desde el pupitre o explicando los pasos efectuados en la pizarra – esta práctica es esencial para la detección de problemas de aprendizaje en los alumnos. En cualquier caso, deberían ser los problemas, y no los ejercicios, el foco de atención en el que el profesor haga más hincapié.

Las razones de esta última consideración son múltiples: en primer lugar debemos recordar que, desde nuestra propuesta, es el campo de problemas el que debe hacer surgir las justificaciones necesarias para la introducción de nuevos objetos matemáticos. Por ello, es crucial mantener una dinámica de interacción con la clase mediante la que se presenten nuevos ejemplos de fenómenos cuyo estudio requiere la introducción de técnicas relacionadas con la manipulación de logaritmos y exponenciales. Por otra parte, el mantener el contacto con el planteamiento de problemas extraídos de situaciones verosímiles del ámbito científico – ya sea extramatemático o intramatemático –, es muy importante para conseguir una mayor motivación por parte de los alumnos hacia la materia. En último lugar, consideramos prioritario desarrollar en los estudiantes la capacidad para interpretar la realidad que les rodea desde un enfoque matemático. En este sentido, es fundamental hacer hincapié en la realización de actividades que les permitan ejercitar las habilidades de interpretación, modelización y traducción de los resultados obtenidos.

G. Tecnologías.

1. Razonamientos que justifican las técnicas.

- TEC1. Definición de exponencial y logaritmo.

  La definición de exponencial y logaritmo, o más bien la relación entre ambos, justifica en último término la mayoría de las propiedades básicas trabajadas. Es por este motivo que conviene establecerla como punto de partida de la exposición. La formalización de esta relación se expresa en los siguientes términos:

  $$\log_a(x) = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

  La relación entre la función exponencial y la función logarítmica, establecida informalmente mediante la observación de las propiedades de simetría de las gráficas de ambas funciones, sirve como apoyo a este conocimiento, cerrando la unidad didáctica.

- TEC2. Demostraciones breves a partir de definiciones.

  Las demostraciones de las propiedades algebraicas de los logaritmos son un ejemplo paradigmático de este tipo de tecnologías, que deben apoyarse también en la realización de experimentos numéricos. Éstos deben interpretarse adecuadamente, indicando la posibilidad de establecer un enunciado general.

  Por ejemplo, para demostrar la propiedad del logaritmo del cociente procedemos del siguiente modo:

  $$\log_b M = x \Longleftrightarrow b^x = M$$
  $$\log_b N = y \Longleftrightarrow b^y = N$$

  Por tanto,

  $$\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

  Volviendo a utilizar la definición, obtenemos:

  $$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = x - y = \log_b M - \log_b N.$$

- TEC3. Demostraciones breves a partir de propiedades conocidas.

  Este tipo de demostraciones, que implican cierta abstracción y complejidad, deben complementarse en la medida de lo posible con el uso de otros modelos, como por ejemplo la observación de propiedades de las gráficas de las funciones involucradas o, de nuevo, la experimentación numérica.

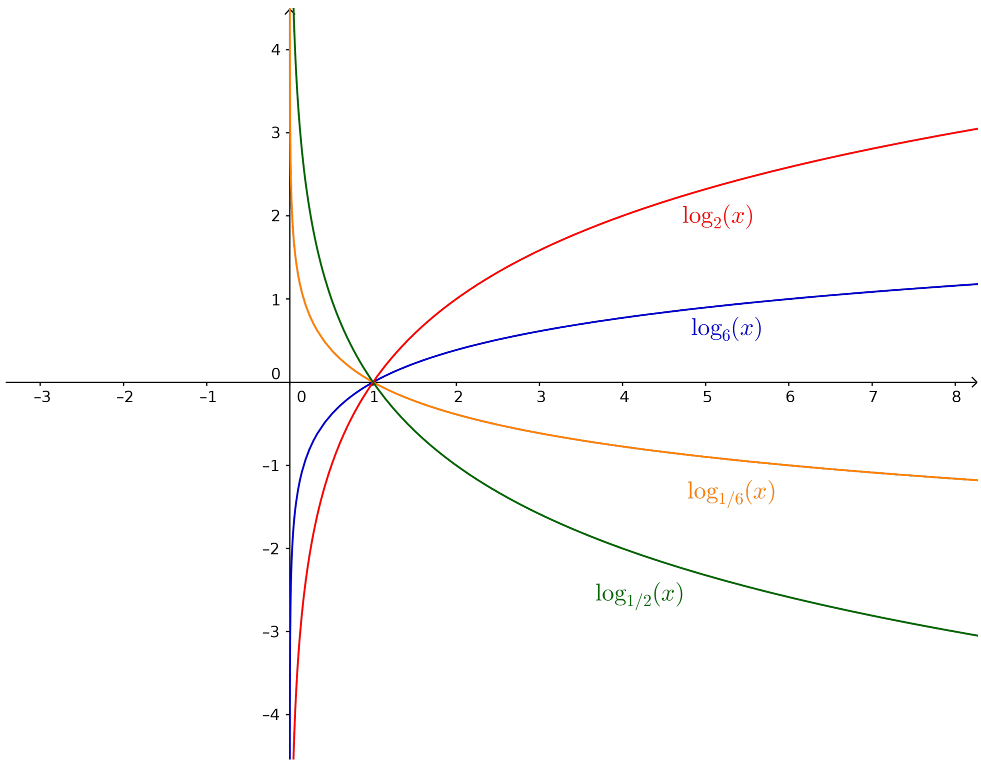
Como ejemplo podemos mostrar la demostración de la relación

$$\log_{1/a}(x) = -\log_a(x)$$

En efecto, la primera opción puede consistir en realizar experimentos numéricos con la ayuda de la calculadora. Si ésta no dispone de la opción para calcular logaritmos en bases arbitrarias, puede ofrecérseles a los alumnos la opción de utilizar la fórmula de cambio de base:

$$\log_{1/a}(x) = \frac{\log(x)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)}$$

Además de los resultados arrojados por la experimentación numérica, que deberían ser sugerentes, se abre la vía de investigar la representación gráfica de las funciones $f(x) = \log_a(x)$ y $g(x) = \log_{1/a}(x)$. Mediante la construcción de una tabla de valores (quizá incluso aprovechando los antes obtenidos con la calculadora), pueden dibujarse las gráficas de las dos funciones, constatando su simetría respecto del eje X. Para hacer esta simetría más llamativa, puede dibujarse cada gráfica con un color distinto.



También es conveniente utilizar GeoGebra para dar más ejemplos de funciones para las que esta relación se cumple, modificando el valor del número real a. Esto último puede verse como un ejercicio adicional, de forma que los alumnos practiquen con GeoGebra.

Finalmente, retomamos la fórmula del cambio de variable para, utilizando las propiedades de los logaritmos, demostrar formalmente la relación buscada:

$$\log_{1/a}(x) = \frac{\log(x)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log(x)}{\cancelto{0}{\log 1} - \log a} = -\frac{\log(x)}{\log a} = -\log_a(x)$$

Este ejemplo nos permite comprobar cómo los dos enfoques algebraico y analítico, tradicionalmente separados, pueden complementarse para ofrecer una mayor variedad de modelos.

2. Sujeto responsable de la justificación de las técnicas.

Sin dejar de considerar en todo momento la construcción de aprendizajes significativos por parte de los alumnos, la complejidad de las técnicas motiva que sea el profesor el responsable de institucionalizar las técnicas y las tecnologías desarrolladas a lo largo de la secuencia didáctica.

Se fomentará en todo momento la capacidad crítica del alumnado para involucrarle en el proceso de enseñanza-aprendizaje, animando a los estudiantes a plantear cuantas preguntas estimen oportuno. Pensamos que facilitar un contexto de debate y discusión racional es imprescindible para que los alumnos desarrollen la capacidad de establecer relaciones lógicas, evaluar su propia comprensión y juzgar las producciones de sus compañeros. Entendemos que la puesta en práctica estas capacidades son las que permiten dar sentido a la comprensión de las matemáticas como conocimiento racional y objetivo.

De forma análoga a la división en dos fases para la resolución de problemas, establecida en el apartado 4 de la sección D, podemos distinguir cuatro momentos relevantes que caracterizan el proceso de institucionalización llevada a cabo en el aula. Pasamos a describirlos brevemente:

1. **Experimentación numérica:** una vez planteado el objeto matemático a estudiar, por ejemplo, desde el campo de problemas, los estudiantes desarrollan actividades para familiarizarse con los conceptos introducidos. El objetivo es que, a través del método de ensayo y error, y con ayuda de la calculadora o el software GeoGebra, los alumnos reconozcan patrones numéricos que les permitan conjeturar resultados generales. Este tipo de actividades pueden desarrollarse, bien de forma autónoma, o bien en pequeños grupos. El profesor puede guiar o validar los descubrimientos hechos por los alumnos, pero tratando de interferir lo menos posible, de forma que sean ellos mismos quienes van descubriendo las propiedades a estudiar.

2. **Formulación de conjeturas:** esta fase es una de las más importantes, ya que en ella es cuando los alumnos deben sintetizar los resultados de los experimentos numéricos elaborados durante la fase anterior. En el caso de las funciones logarítmicas, por ejemplo, la elaboración de una tabla de valores puede haberles aportado información acerca del crecimiento o decrecimiento de la función, cortes con el eje Y, etc. En el caso del estudio de las funciones exponenciales, diversos grupos pueden haber llegado a conclusiones totalmente distintas en función de si han escogido una base a con $0 < a < 1$, ó bien $a > 1$. Otro ejemplo posible aparece con el estudio de las propiedades algebraicas de los logaritmos, donde esperamos que los alumnos hayan desarrollado alguna intuición acerca de la relación entre el logaritmo de un producto y la suma de los logaritmos de cada uno de los factores.

3. **Establecimiento de resultados generales:** en esta fase, el profesor debe animar a los alumnos a demostrar de la manera más rigurosa posible las conjeturas formuladas en la fase anterior. Este momento es el más crítico, ya que el nivel de abstracción necesario para dar el paso a la elaboración de una demostración general no se ha practicado mucho hasta la fecha. Sin embargo, y en la medida de lo posible, creemos que la asignatura debe cubrir en parte algunos de estos aspectos formales, fundamentales en matemáticas, y que sirven como prolegómenos a la enseñanza superior de esta materia.

4. **Validación por parte del profesor:** por último, las demostraciones dadas por los alumnos deben ser validadas por el profesor. Es importante que el docente actúe en tres frentes: por una parte, debe ratificar los resultados y los métodos de demostración correctos desarrollados por los alumnos; en segundo lugar, debe afianzar y aclarar todas las dudas que hayan podido ir surgiendo en el proceso; finalmente, el profesor debe subsanar todas las lagunas y completar los detalles técnicos que considere oportuno de cara a avanzar con la materia. Así, puede proponerse que el profesor haga una demostración en la pizarra comentando todos los aspectos (positivos y negativos) que haya observado en las demostraciones propuestas por los alumnos.

3. Metodología de la implementación en el aula.

A lo largo de los apartados anteriores hemos expuesto los razonamientos y el proceso a seguir. Podemos entender la metodología a seguir como un proceso guiado mediante el cual se espera que los alumnos reflexionen sobre los resultados, pongan en común sus propios descubrimientos y establezcan conclusiones coherentes y expresadas con cierto nivel de rigor. A medida que se van descubriendo más propiedades de los objetos matemáticos a estudiar, el profesor desarrollará las técnicas, conduciendo la explicación hacia su institucionalización.

Somos conscientes de que existen detalles en la exposición cuya demostración rigurosa está fuera del alcance de los estudiantes en este punto. Por ejemplo, resulta difícil dar una justificación para extender la definición de las funciones exponencial y logarítmica más allá del dominio de los números racionales. En este punto, consideramos suficiente apoyarnos en herramientas informáticas (GeoGebra) para dar una justificación, aunque sea parcial, de la técnica de representación de la gráfica de estas funciones mediante la construcción de tablas de valores sencillas y la unión de los puntos dibujados mediante una “curva suave”.

H. Sobre la secuenciación didáctica y su cronograma.

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

La secuencia didáctica se desarrollará en 12 sesiones de 50 minutos de duración, expuestas como muestra la siguiente tabla. Desde luego, la temporalización pretende no ser excesivamente rígida, ya que la aparición de dudas que dificultan el seguimiento de la clase por parte de los alumnos debe ser tenida en cuenta.

Como orientación metodológica debe tenerse en cuenta que los ejercicios están diseñados para ser resueltos a medida que van describiéndose las técnicas en clase. Debe evitarse, por tanto, explicar técnicas sin apoyarse en la realización de actividades para reforzarlas en cuanto sea posible. Del mismo modo, y como ya hemos señalado anteriormente, la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas debe llevarse a cabo, en la medida de lo posible, a través de problemas contextualizados y relacionados con las razones de ser descritas.

Aunque no se ha incluido en la tabla, puede plantearse una última sesión en la que el profesor corrija el examen en la pizarra, señalando los aciertos y los errores de los alumnos, así como distintas maneras de plantear y resolver los problemas de la prueba escrita. Esta corrección puede ser utilizada por los alumnos para corregir sus exámenes en casa y entregarlos bien resueltos y comentados al profesor (véase apartado 3 de la sección I).

A pesar de que la prueba escrita aparezca como S12, puede proponerse realizar el examen dejando algunos días de margen para que los alumnos tengan el tiempo necesario de cara a repasar los conceptos trabajados y realizar ejercicios y problemas. Plantear la realización del examen para la primera sesión después del siguiente fin de semana puede ser una opción razonable. Debe evitarse, en cambio, posponer la fecha más allá de un periodo vacacional.

Sesión	Actividades
S1. Introducción a las funciones exponenciales.	1. Problema del trigo y el tablero de ajedrez. 2. **RdS1:** Método del Carbono 14.
S2. Definición de función exponencial	1. Restricciones en los valores de la base. 2. Experimentación numérica con $f(x) = 2^x$. 3. Experimentación numérica con $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
S3. Función exponencial: propiedades. Ecuaciones exponenciales.	1. Propiedades de la función exponencial. 2. Simetría de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ respecto del eje de ordenadas. 3. Resolución de ecuaciones exponenciales sencillas y mediante cambio de variable.
S4. Más experimentos con la función exponencial.	1. Comparación de distintas funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. 2. Realización de ejercicio **T2.E1**. 3. Experimentación numérica con funciones exponenciales de base muy próxima a 1 ($a = 1,01$, $a = 1,001$,...). 4. **Actividad con GeoGebra:** representación gráfica de las funciones anteriores.
S5. Introducción a los logaritmos.	1. **RdS2:** Problema: "¿qué me ofrece el banco?" 2. Definición razonada de logaritmo a partir de RdS2. 3. Restricciones en los valores de la base. 4. Realización de ejercicio **T1.E1**.
S6. Experimentación numérica y propiedades de los logaritmos.	1. Cálculo del logaritmo decimal de progresiones geométricas. 2. Experimentación numérica con el logaritmo decimal. 3. Propiedades algebraicas del logaritmo. 4. Realización de ejercicios **T1.E2**, **T1.E3** y **T1.E5**.

Sesión	Actividades
S7. Logaritmos en otras bases.	1. Fórmula del cambio de base. 2. Cálculo de logaritmos en otras bases con ayuda de la calculadora. 3. **Tarea para casa:** investigar la relación entre $\log_{1/2}(x)$ y $\log_2(x)$.
S8. Función logarítmica.	1. Representación gráfica de $f(x) = \log_a(x)$ para distintos valores de a. 2. Realización de ejercicios asociados a las técnicas de **T3**. 3. Resolución de la tarea para casa, representando gráficamente las funciones $f(x) = \log_2(x)$ y $g(x) = \log_{1/2}(x)$. 4. Demostración algebraica, usando la fórmula del cambio de base, de la relación $\log_{1/a}(x) = -\log_a(x)$.
S9. Propiedades de la función logarítmica. Ecuaciones logarítmicas.	1. Propiedades de la función logarítmica a partir de su representación gráfica. 2. Resolución de ecuaciones logarítmicas sencillas utilizando la definición. 3. Resolución de ecuaciones logarítmicas generales. 4. Resolución del problema "¿Qué me ofrece el banco?"
S10. Resolución de problemas.	1. Resolución de problemas contextualizados. 2. Situaciones que requieren el uso de logaritmos: escala de Richter, ley psicofísica de Weber-Fechner, decibelios...
S11. Relación con la función exponencial.	1. Criterio de simetría para la función inversa. 2. Realización de ejercicios asociados a las técnicas de **T4**. 3. Representación en el mismo eje de coordenadas de las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a(x)$ para distintos valores de a. 4. Repaso de las dudas de cara al examen.
S12.	Prueba escrita.

I. Sobre la evaluación.

1. Diseño de una prueba escrita. Aspectos a evaluar.

A continuación se muestra una prueba escrita diseñada para evaluar la unidad didáctica objeto de este trabajo. El examen consta de **5** preguntas, cada una de las cuales puntúa **8 puntos** sobre un total de **40 puntos**. La calificación de cada uno de los apartados aparece al margen. Se hace mención explícita al hecho de que todas las respuestás deberán estar debidamente justificadas y razonadas. Salvo que se especifique el uso de ninguna técnica en particular, se asume que los alumnos podrán emplear cualquiera de las técnicas vistas en clase. Las técnicas que no hayan sido tratadas en clase se aceptarán, siempre que se justifiquen adecuadamente.

Para evitar la repetición innecesaria de información señalamos, a continuación de cada enunciado, los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se pretenden evaluar, utilizando la indexación establecida en las secciones E, F y G. Se incluye también un análisis de las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales que se espera que el alumno lleve a cabo en la resolución de cada uno de los problemas y ejercicios planteados. El manejo adecuado de la calculadora se entiende como una tarea auxiliar general presente en todos los apartados, por lo que, en aras de la brevedad, no haremos mención explícita de ella en lo que sigue.

[**1**] Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $3^4 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 1 = 0$. **(3 puntos)**

b) $\log x = \dfrac{1}{2} \log 49 - 2 \cdot \log 7$. **(2 puntos)**

c) $\log x = 3 \log a + 2 \log m - \dfrac{1}{3} \log n$. **(3 puntos)**

Nota: en la resolución del apartado (a) debes utilizar la **técnica de cambio de variable**.

- **Campo de problemas:**
  - *Apartado (a)*: CP4.2, CP4.3, (opcionalmente CP4.4).
  - *Apartado (b)*: CP1.2, CP1.3, CP5.3 (opcionalmente CP5.2).
  - *Apartado (c)*: CP1.2, CP1.3, CP5.3 (opcionalmente CP5.2).
- **Técnicas:**
  - *Apartado (a)*: T0.1, T0.2, T0.6, T2.3, T5.1, T5.2 (opcionalmente T1.1 y T5.3).

- *Apartado (b)*: T1.3, T1.4, T1.5 (opcionalmente T1.1 y T6.1), T6.1, T6.2.
- *Apartado (c)*: T1.3, T1.4, T1.5 (opcionalmente T1.1 y T6.1), T6.1, T6.2.

- **Tecnologías:**
  - *Apartado (a)*: ninguna.
  - *Apartado (b)*: ninguna.
  - *Apartado (c)*: ninguna.

Estándares de aprendizaje evaluables (L.O.M.C.E. 2016):

- *Apartado (a)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.4.1, Est.MAAC.1.8.3, Est.MAAC.1.9.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.5, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.2.3.1, Est.MAAC.2.3.2.
- *Apartado (b)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.4.1, Est.MAAC.1.8.3, Est.MAAC.1.9.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.5, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.2.3.1, Est.MAAC.2.3.2.
- *Apartado (c)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.4.1, Est.MAAC.1.8.3, Est.MAAC.1.9.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.5, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.2.3.1, Est.MAAC.2.3.2.

- **Tareas principales:**
  - *Apartado (a)*: resolver la ecuación exponencial $3^4 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 1 = 0$ mediante la técnica de cambio de variable.
  - *Apartado (b)*: aplicar la técnica de identificación de los argumentos para resolver la ecuación logarítmica $\log x = \frac{1}{2} \log 49 - 2 \cdot \log 7$.
  - *Apartado (c)*: aplicar la técnica de identificación de los argumentos para resolver la ecuación logarítmica $\log x = 3 \log a + 2 \log m - \frac{1}{3} \log n$.
- **Tareas auxiliares específicas:**
  - *Apartado (a)*: Deshacer el cambio de variable involucra resolver la ecuación exponencial $3^x = 1/9$. Esto último puede llevarse a cabo utilizando logaritmos o, más sencillamente, empleando la definición. Manipular expresiones algebraicas en las que aparecen potencias, aplicando sus propiedades básicas.
  - *Apartado (b)*: aplicar las propiedades algebraicas de los logaritmos.

- *Apartado (c)*: aplicar las propiedades algebraicas de los logaritmos. También se exige un cierto nivel de abstracción por la presencia de indeterminadas distintas de x.

- **Tareas auxiliares generales:**

  - *Apartado (a)*: resolución de ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general o hallando raíces enteras utilizando la regla de Ruffini. Manejo adecuado de operaciones elementales. Tanteo orientativo de posibles soluciones por medio de la asignación de valores a la x. Técnicas básicas de manipulación de expresiones algebraicas. Validación de la solución obtenida sustituyéndola en la ecuación.
  - *Apartado (b)*: realización de operaciones elementales, así como prestar atención a la jerarquía de operaciones. Aplicación de la propiedad de inyectividad a la hora de identificar argumentos. Validación de la solución obtenida sustituyéndola en la ecuación.
  - *Apartado (c)*: realización de operaciones elementales, así como prestar atención a la jerarquía de operaciones. Identificación correcta de la incógnita en la ecuación a resolver. Validación de la solución obtenida sustituyéndola en la ecuación.

Posibles respuestas esperadas:

Apartado (a): dada la ecuación $3^4 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 1 = 0$, la estrategia canónica consiste en realizar el cambio de variable $t = 3^x$. Con esto, la ecuación se transforma en

$$3^4 \cdot t^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot t + 1 = 0$$

En otras palabras, obtenemos $81t^2 - 18t + 1 = 0$. Aquí tenemos varias opciones: la más directa consiste en emplear la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado. Con ello, obtenemos:

$$t = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 324}}{2 \cdot 81} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2 \cdot 81} = \frac{1}{9}$$

Otra opción podría ser expresar la ecuación como

$$t^2 - 2 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 0$$

Aplicando identidades notables, se obtiene que $(t - \frac{1}{9})^2 = 0$, con lo que $t = \frac{1}{9}$. Finalmente, deshaciendo el cambio de variable mediante la resolución de la ecuación $\frac{1}{9} = 3^x$, obtenemos $x = -2$. Esto puede hacerse por identificación de exponentes, por definición de logaritmos o aplicando logaritmos.

Como es lógico, la solución puede obtenerse también por tanteo, dando valores a la x y verificando si se cumple la igualdad. Si algún alumno resolviera el ejercicio de este modo no debe penalizársele en ningún caso, siempre que justifique su estrategia. En cualquier caso, el hecho de que la solución sea un número negativo debería reducir en cierta medida la probabilidad de que los alumnos utilicen esta estrategia.

Apartado (b): la resolución esperada de la ecuación $\log x = \frac{1}{2}\log 49 - 2 \cdot \log 7$ pasa, en primer lugar, por agrupar los términos a la derecha del igual utilizando las propiedades de los logaritmos. De este modo obtenemos:

$$\log x = \log \frac{\sqrt{49}}{7^2} = \log \frac{7}{49} = \log \frac{1}{7}$$

Finalmente, identificando los argumentos, concluimos que $x = \frac{1}{7}$. Otra opción consiste en agrupar todos los términos a la izquierda del igual, lo que nos lleva a la expresión

$$\log \frac{7^2 \cdot x}{\sqrt{49}} = \log 7 \cdot x = 0$$

Por definición de logaritmo deducimos que $7 \cdot x = 1$, de donde $x = \frac{1}{7}$.

Apartado (c): el método de resolución de este apartado es completamente análogo al anterior con la salvedad de la aparición de indeterminadas. Por este motivo omitimos la exposición de su resolución, en aras a la brevedad.

Posibles errores cometidos:

Apartado (a): entre los posibles errores destaca el no encontrar un cambio de variable adecuado. La casuística aquí abarca un gran número de posibilidades, pero quizá la más común sea decidir el cambio $t = 9^x$, que complica la ecuación, ya que introduce radicales en el monomio que contiene el término 3^x. Otro error, bastante grave, relacionado con la incomprensión de la definición de logaritmo, puede consistir en despejar la ecuación $\frac{1}{9} = 3^x$ haciendo $x = \frac{1}{9 \cdot 3}$. No esperamos grandes dificultades a la hora de resolver la ecuación de segundo grado, aunque siempre pueden tener lugar errores de cuentas en este tipo de procedimientos.

Apartado (b): los errores más frecuentes pasan por agrupar de forma incorrecta los términos. Como ejemplo de ello, puede verse:

$$\frac{1}{2}\log 49 - 2 \cdot \log 7 = \log \frac{\frac{49}{2}}{2 \cdot 7} = \log \frac{49}{28} = \log \frac{7}{4}$$

Lógicamente, pueden esperarse distintos tipos de errores relacionados con las cuentas o la aplicación incorrecta de la jerarquía de operaciones. También pueden esperarse errores en la aplicación de la propiedad $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$, ya que en muchas ocasiones los alumnos agrupan esta diferencia confundiendo numerador y denominador.

Apartado (c): se esperan errores análogos a los mencionados en el apartado (b). A ellos se unen errores en la identificación de la incógnita que debemos despejar (en nuestro caso, la x).

[**2**] Considera la función $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

a) Con la ayuda de la calculadora, evalúa la función para distintos valores de x. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función uniendo adecuadamente los puntos que obtienes. **(3 puntos)**
b) Estudia el dominio, recorrido, crecimiento o decrecimiento y extremos relativos de la función. ¿Observas alguna asíntota horizontal? ¿Cuál? **(3 puntos)**
c) ¿Qué relación hay entre esta función y la función $g(x) = 3^x$? **(2 puntos)**

- **Campo de problemas:**
  - *Apartado (a)*: CP2.2.
  - *Apartado (b)*: CP2.3.
  - *Apartado (c)*: CP2.4.
- **Técnicas:**
  - *Apartado (a)*: T2.1, T2.2, T2.3.
  - *Apartado (b)*: T2.4, T2.5, T2.6, T2.7, T2.8.
  - *Apartado (c)*: similares a las mencionadas para el apartado (a), referidas esta vez al estudio de la función $g(x) = 3^x$.
- **Tecnologías:**
  - *Apartado (a)*: ninguna.
  - *Apartado (b)*: ninguna.
  - *Apartado (c)*: ninguna.

Estándares de aprendizaje evaluables (L.O.M.C.E. 2016):

- *Apartado (a)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.5, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.2.4.

- *Apartado (b)*: Est.MAAC.1.2.4, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.5, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.2.4.

- *Apartado (c)*: Est.MAAC.1.2.3, Est.MAAC.1.2.4, Est.MAAC.1.3.1, Est.MAAC.1.3.2, Est.MAAC.1.4.1, Est.MAAC.1.5.1, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.5, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.2.4.

- **Tarea principal:**

  - *Apartado (a)*: en líneas generales, vienen desglosadas en el enunciado. (Evaluar la función para diversos valores de x, construir una tabla de valores, representar adecuadamente los puntos obtenidos y representar la gráfica aproximada de la función uniendo los puntos adecuadamente.)
  - *Apartado (b)*: manejo de las nociones básicas asociadas al estudio de funciones (dominio, recorrido, crecimiento, extremos, asíntota horizontal...). Interpretación correcta de los datos dados por la tabla de valores y la gráfica de la función representada. Precisión en la utilización de notación conjuntista y de intervalos.
  - *Apartado (c)*: determinar la relación entre la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y la función $g(x) = 3^x$

- **Tareas auxiliares específicas:**

  - *Apartado (a)*: ninguna.
  - *Apartado (b)*: ninguna.
  - *Apartado (c)*: basta recordar las propiedades que relacionan ambas funciones, vistas en clase. En su defecto, puede evaluarse $g(x)$ para los mismos valores de x que los utilizados en la construcción de la tabla de valores de $f(x)$, observando numéricamente la relación $g(-x) = f(x)$. También se puede representar la función $g(x)$ en los mismos ejes coordenados que $f(x)$ para ver con más claridad la relación entre ambas funciones.

- **Tareas auxiliares generales:**

  - *Apartado (a)*: manejo aritmético básico al evaluar la función. Claridad y limpieza en la representación gráfica. Orden y precisión a la hora de construir la tabla de valores. Representación adecuada de los puntos en los ejes coordenados.
  - *Apartado (b)*: interpretación adecuada de datos gráficos, orden en la exposición. Identificación correcta de la asíntota horizontal.

- *Apartado (c)*: manejo aritmético básico al evaluar la función $g(x) = 3^x$. Identificación visual de propiedades de simetría o, en su defecto, observación de relaciones numéricas sencillas y formulación en términos matemáticos de estas relaciones.

Posibles respuestas esperadas:

Apartado (a): la manera más directa de resolver este apartado consiste en asignar distintos valores a la x para obtener puntos y construir así una tabla de valores como la siguiente:

Valor de x	Valor de $f(x) = (1/3)^x$
$x = -2$	9
$x = -1$	3
$x = 0$	1
$x = 1$	1/3
$x = 2$	1/9
$x = 3$	1/27

A continuación deben dibujarse los ejes coordenados, representando los puntos obtenidos y uniéndolos mediante una curva suave. El resultado debería ser similar al que mostramos a continuación:

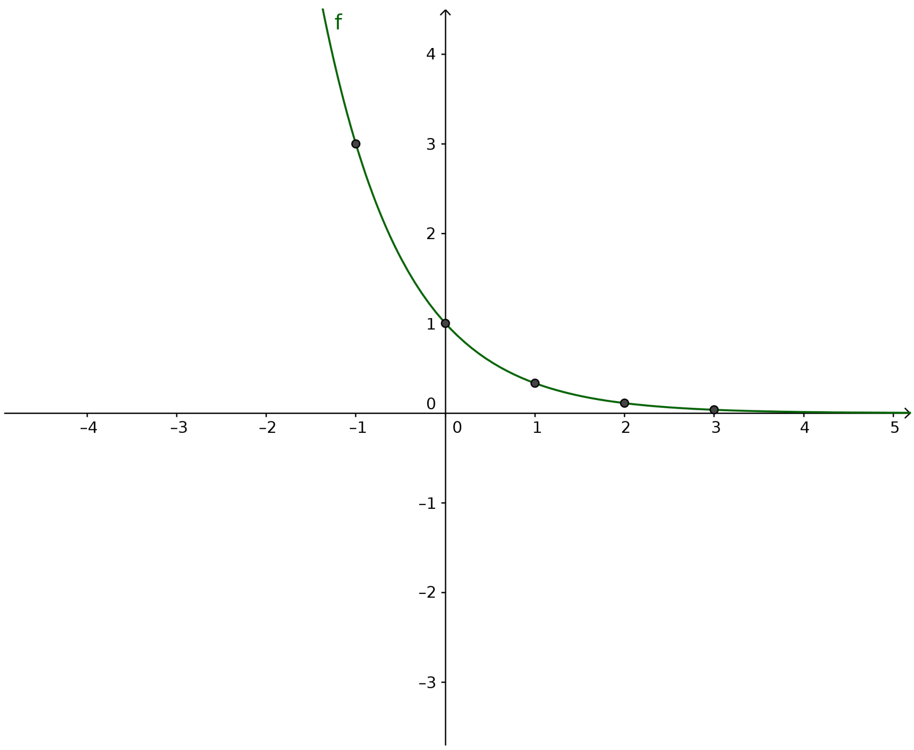


Figura 9.1: Resultado del apartado 2.(a)

Apartado (b): el estudio de la gráfica de la función debería sugerir inmediatamente que $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}\, f(x) = \mathbb{R}^+$. La inspección visual revela también que la función es estrictamente decreciente, y por lo tanto no existen extremos relativos. La asíntota horizontal es el eje X.

Apartado (c): una primera aproximación que puede darse por válida consiste en experimentar evaluando la función $g(x) = 3^x$ y observando patrones o relaciones geométricas entre los puntos obtenidos y los hallados en el apartado (a). El ejercicio puede considerarse completo construyendo una tabla de valores para la función $g(x)$ y representándola sobre los mismos ejes coordenados que la función $f(x)$. De este modo puede observarse claramente la simetría de la figura respecto al eje de ordenadas.

Posibles errores cometidos:

Apartado (a): el primer error que puede ocurrir reside en un uso incorrecto de la calculadora, el cual conlleva frecuentemente errores de redondeo. Asumir de partida que $1/3 = 0,3$ sin comentar nada acerca de la imprecisión que ello implica suele suceder usualmente. Otros errores típicos pueden tener que ver con errores al evaluar la función: quizá el más repetido sea afirmar que $f(0) = (1/3)^0 = 0$.

Apartado (b): cabe pensar que los posibles errores de este apartado sean consecuencia de representar erróneamente la función. Hay que tener en cuenta este hecho a la hora de calificar, ya que podemos contar como bueno el análisis de una función distinta (siempre que éste siga haciendo posible la evaluación del alumno).

Apartado (c): el error más común puede provenir de dar una respuesta no justificada. Normalmente esta respuesta es errónea, ya que el alumno no se ha parado a pensar detenidamente acerca del aspecto de la función a comparar. Por lo demás, los errores a los que está sujeto este apartado son análogos a los descritos en la resolución del apartado (a).

[**3**] Considera la función $g(x) = \log_{1/3}(x)$

a) Con la ayuda de la calculadora, evalúa la función para distintos valores de x. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función uniendo adecuadamente los puntos que obtienes. **(2 puntos)**

b) ¿Qué relación hay entre $\log_{1/3}(x)$ y $\log_3(x)$? Justifícala. **(3 puntos)**

c) Observa la gráfica de la función $f(x) = (1/3)^x$, hallada en el apartado anterior, y compárala con la de la función $g(x) = \log_{1/3}(x)$, dibujando ambas gráficas en los mismos ejes coordenados. ¿Observas alguna simetría entre ellas? ¿Cuál es la inversa de la función $f(x) = (1/3)^x$? **(3 puntos)**

- **Campo de problemas:**

- *Apartado (a)*: CP3.2.
- *Apartado (b)*: CP3.3, CP3.4
- *Apartado (c)*: CP6.

- **Técnicas:**
    - *Apartado (a)*: T1.6, T3.1, T3.2, T3.3, T3.4, T3.8.
    - *Apartado (b)*: T1.6, T1.7, T3.1, T3.2, T3.3, T3.4, T3.8.
    - *Apartado (c)*: T4.1, T4.2, T4.3.

- **Tecnologías:**
    - *Apartado (a)*: ninguna.
    - *Apartado (b)*: ninguna.
    - *Apartado (c)*: se evalúa TEC3.

Estándares de aprendizaje evaluables (L.O.M.C.E. 2016):

- *Apartado (a)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.5, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.2.4.

- *Apartado (b)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.3, Est.MAAC.1.3.1, Est.MAAC.1.2.4, Est.MAAC.1.5.1, Est.MAAC.1.7.1, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.1.4, Est.MAAC.4.1.5, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.2.4.

- *Apartado (c)*: Est.MAAC.1.2.3, Est.MAAC.1.2.4, Est.MAAC.1.3.1, Est.MAAC.1.3.2, Est.MAAC.1.4.1, Est.MAAC.1.5.1, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.5, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.2.4.

- **Tarea principal:**
    - *Apartado (a)*: en líneas generales, vienen desglosadas en el enunciado. (Evaluar la función para diversos valores de x, construir una tabla de valores, representar adecuadamente los puntos obtenidos y representar la gráfica aproximada de la función uniendo los puntos adecuadamente.)
    - *Apartado (b)*: hallar la relación entre $\log_{1/3}(x)$ y $\log_3(x)$.
    - *Apartado (c)*: determinar la inversa de la función $f(x) = (1/3)^x$ a partir de la comparación de su gráfica con la de la función $g(x) = \log_{1/3}(x)$ y el criterio de simetría.

- **Tareas auxiliares específicas:**
  - *Apartado (a)*: ninguna.
  - *Apartado (b)*: para hallar la relación basta dar varios valores numéricos a la x en uno y otro caso y observar que los resultados obtenidos son opuestos. Para justificar la relación puede utilizarse la fórmula del cambio de base y las propiedades algebraicas de los logaritmos. (Logaritmo de un cociente o logaritmo de una potencia de exponente negativo, por ejemplo.) Otra manera de justificar la relación sería realizar una representación gráfica de ambas funciones, viendo que son simétricas respecto del eje X.
  - *Apartado (c)*: representación simultánea de dos gráficas en los mismos ejes coordenados. Identificación adecuada de la relación de simetría existente entre las dos gráficas, señalando la bisectriz del primer cuadrante como eje de la simetría. Aplicación del criterio de simetría para la determinación de la función inversa.

- **Tareas auxiliares generales:**
  - *Apartado (a)*: manejo aritmético básico al evaluar la función. Claridad y limpieza en la representación gráfica. Orden y precisión a la hora de construir la tabla de valores. Representación adecuada de los puntos en los ejes coordenados.
  - *Apartado (b)*: operaciones básicas al evaluar ambas expresiones. Identificación de las relaciones numéricas (o geométricas, en su caso) observadas, formulándolas en términos matemáticos.
  - *Apartado (c)*: orden y precisión en la representación gráfica de las funciones.

Posibles respuestas esperadas:

Apartado (a): el método para resolver este apartado es totalmente análogo al seguido en el apartado (a) del ejercicio [2]. La diferencia aquí consiste en observar las características de la función logaritmo (sólo existe para números reales estrictamente mayores que 0, hay que aplicar la fórmula del cambio de variable...). Así, al dar distintos valores a la x puede construirse una tabla de valores como la siguiente:

Valor de x	Valor de $g(x) = \log_{1/3}(x)$
$x = -1$	No está definido
$x = 0$	No está definido
$x = 1/9$	2
$x = 1/3$	1
$x = 1$	0
$x = 3$	-1
$x = 9$	-2

Con los datos obtenidos pueden dibujarse los ejes coordeandos, representado los puntos dados por la tabla de valores y uniéndolos mediante una curva suave. El resultado se muestra en la figura 9.2.

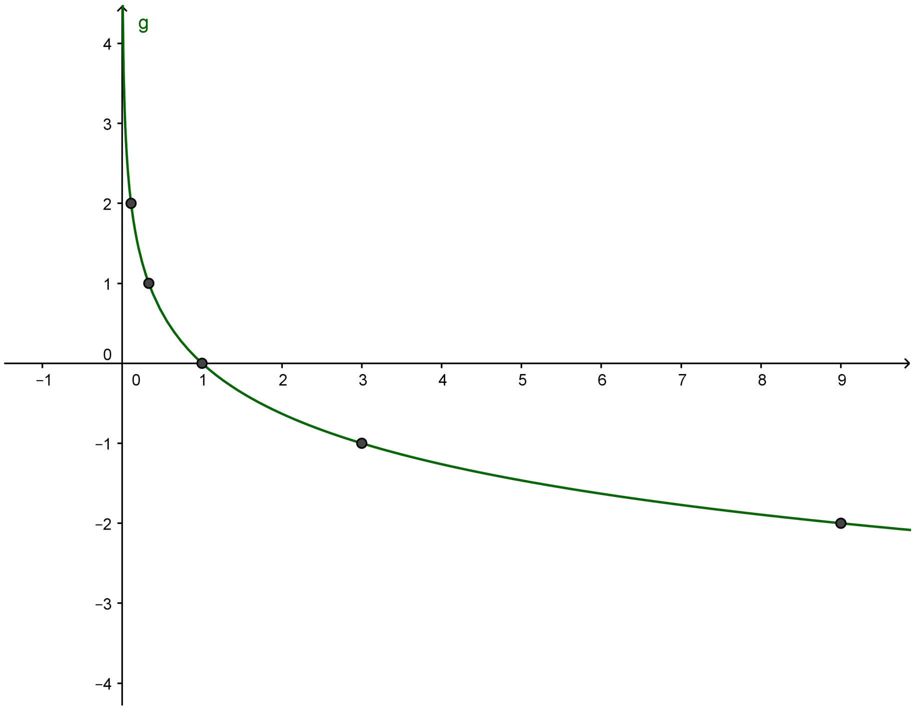


Figura 9.2: Resultado del apartado 3.(a)

Apartado (b): de forma similar a lo que sucede en el apartado 2.(c), una primera manera de atacar el problema puede ser evaluar las funciones $f_1(x) = \log_3(x)$ y $g_1(x) = \log_{1/3}(x)$ en distintos puntos, tratando de identificar patrones que relacionen los números obtenidos. Otra manera de completar el ejercicio puede ser construir una tabla de valores y representar ambas figuras en los mismos ejes coordenados, señalando la simetría respecto del eje X. Esta justificación puede servir para mostrar la relación $\log_{1/3}(x) = -\log_3(x)$.

Por último, puede resolverse el ejercicio a través de una demostración formal, utilizando la fórmula de cambio de base y aplicando alguna de las propiedades elementales de los logaritmos. El razonamiento podría seguir los siguientes pasos:

$$\log_{1/3}(x) = \frac{\log(x)}{\log\left(\dfrac{1}{3}\right)} = \frac{\log(x)}{\cancelto{0}{\log 1} - \log 3} = -\frac{\log(x)}{\log 3} = -\log_3(x)$$

Aquí puede evaluarse TEC3, ya que la resolución permite evaluar si se han asimilado nociones relacionadas con los procesos matemáticos de demostración formal, así como el correcto uso del lenguaje algebraico.

Apartado (c): tal y como está redactado el enunciado, los pasos para resolver este apartado deberían ser bastante claros. Se trata de dibujar las funciones estudiadas en los ejercicios [2] y [3] en los mismos ejes coordenados, observando la relación de simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante que caracteriza a las funciones inversas. Con ello, puede darse una respuesta justificada.

Posibles errores cometidos:

Apartado (a): al igual que sucede en el apartado (a) del ejercicio [2], el uso incorrecto de la calculadora puede conducir a errores en la evaluación de la función $g(x) = \log_{1/3}(x)$. Aquí pueden aparecer equivocaciones relacionadas con el dominio de la función, ya que puede ocurrir que los alumnos traten de representar puntos correspondientes a valores de x en los que la función no esté definida. Además, dado que habitualmente se muestran logaritmos con base $a > 1$, el distinto comportamiento de la función puede llevar a algunos estudiantes a confusión. Este obstáculo debería haber sido subsanado en clase mediante el estudio de ejemplos de este tipo de funciones logarítmicas, en las que la base es $0 < a < 1$. No sería infrecuente observar errores derivados de aplicar mal la fórmula de cambio de base, por lo que podría plantearse incluirla en el examen para que los alumnos no tuvieran que recordarla.

Apartado (b): en este apartado pueden aparecer errores similares a los del apartado (a), esta vez referidos al estudio de la función $\log_3(x)$ (representar puntos que no pertenecen al dominio, errores en la aplicación de la fórmula de cambio de base, etc.) Además pueden surgir confusiones de tipo terminológico o de nomenclatura, ya que la solución consiste en darse cuenta de que $\log_{1/3}(x)$ y $\log_3(x)$ son números reales **opuestos**. Dado que en esta unidad didáctica aparecen por primera vez otros tipos de relaciones, no es descabellado pensar que los alumnos respondan afirmando que los dos números son **inversos**, o que las funciones $\log_3(x)$ y $\log_{1/3}(x)$ son inversas la una respecto de la otra.

Apartado (c): salvo errores procedentes de una representación equivocada de las funciones, arrastrados de los apartados anteriores, no deberían surgir mayores problemas en la resolución de este ejercicio. Quizá una mala comprensión del criterio de simetría pueda llevar a los alumnos a confusión.

[**4**] Actualmente tienes 500 € en tu cuenta corriente. El banco te ofrece un interés del 3 % anual. Esto significa que, al cabo de un año, el banco ingresa en tu cuenta 3 € por cada 100 € de tu cuenta corriente.

a) Escribe la función que expresa los euros que hay en tu cuenta corriente al cabo de t años. **(2 puntos)**

b) ¿Cuánto dinero tendrás en tu cuenta corriente al cabo de 3 años? ¿Y al cabo de 5 años? **(2 puntos)**

c) ¿Cuántos años deberás esperar para tener 600 €? **(4 puntos)**

- **Campo de problemas:**
  - *Apartado (a)*: CP2.1.
  - *Apartado (b)*: CP2.1.
  - *Apartado (c)*: CP4.1, CP4.2, CP4.4.
- **Técnicas:**
  - *Apartado (a)*: no hay una técnica específica. Debe intepretarse adecuadamente el enunciado, observando que el interés compuesto puede modelizarse como una función exponencial de la forma $f(t) = 500 \cdot 1,03^t$. Enunciados similares deben haber sido trabajados previamente en el aula.
  - *Apartado (b)*: T2.1.
  - *Apartado (c)*: T5.3 (opcionalmente T5.1).
- **Tecnologías:**
  - *Apartado (a)*: implícitamente se utilizan TEC1 y TEC2.
  - *Apartado (b)*: ninguna.
  - *Apartado (c)*: ninguna.

Estándares de aprendizaje evaluables (L.O.M.C.E. 2016):

- *Apartado (a)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.1.6.1, Est.MAAC.1.6.2, Est.MAAC.1.6.3, Est.MAAC.1.7.1, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.1.6.
- *Apartado (b)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.1.6.1, Est.MAAC.1.6.2, Est.MAAC.1.6.3, Est.MAAC.1.6.4, Est.MAAC.1.6.5, Est.MAAC.1.7.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.2, Est.MAAC.2.2.4, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.1.6.

- *Apartado (c)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.1.2.3, Est.MAAC.1.2.4, Est.MAAC.1.6.1, Est.MAAC.1.6.2, Est.MAAC.1.6.3, Est.MAAC.1.6.4, Est.MAAC.1.6.5, Est.MAAC.1.7.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.2, Est.MAAC.2.2.4, Est.MAAC.2.2.5, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.2.3.1, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.1.6.

- **Tarea principal:**

    - *Apartado (a)*: escribir la función que expresa los euros que hay en la cuenta corriente al cabo de t años, modelizando adecuadamente el interés compuesto en función del tiempo como una función exponencial de base $1,03$.
    - *Apartado (b)*: hallar el dinero que habrá en la cuenta corriente al cabo de 3 y 5 años.
    - *Apartado (c)*: hallar el tiempo que debe transcurrir para tener 600 € en la cuenta corriente.

- **Tareas auxiliares específicas:**

    - *Apartado (a)*: interpretación adecuada del enunciado para construir la función pedida.
    - *Apartado (b)*: este apartado puede resolverse iterando el cálculo del interés obtenido sobre el dinero acumulado año tras año. Equivalentemente, y de modo más sencillo, puede tomarse la función hallada en el apartado (a) y evaluarla para $t = 3$ y para $t = 5$.
    - *Apartado (c)*: resolución de la ecuación exponencial

    $$600 = 500 \cdot 1,03^t.$$

    Este apartado puede resolverse también probando distintos valores de t y observando que para $t = 6$ se obtiene el valor $y = 597,03$€, mientras que para $t = 7$ se obtiene el valor $y = 614,94$€. También pueden utilizarse logaritmos en la resolución, siempre teniendo en cuenta que el valor obtenido ($t \approx 6,17$) debe ser redondeado al número entero 7, ya que el banco sólo ingresa el dinero obtenido por los intereses al final de cada año.

- **Tareas auxiliares generales:**

    - *Apartado (a)*: lectura atenta del enunciado. Adaptación de la fórmula del interés compuesto a este caso. Observación de que, al cabo de un año, el precio inicial x pasa a ser $1,03 \cdot x$, interpretando la tasa de variación anual.

- *Apartado (b)*: operaciones básicas al evaluar la función.
- *Apartado (c)*: operaciones básicas. Intepretación correcta del enunciado para redondear adecuadamente el resultado obtenido.

Posibles respuestas esperadas:

Apartado (a): la respuesta más directa pasa por analizar qué ocurre año tras año con el dinero invertido. Si el primer año nos dan el 3 % de lo depositado, al cabo del año tendremos $500 + 500 \cdot \frac{3}{100} = 500 \cdot (1,03) = 515$€. Al cabo del segundo año, tendremos lo obtenido en el primer año más el 3 %, es decir, $515+515\cdot\frac{3}{100} = 530,45$€.

Ahora podemos observar que el dinero obtenido en el segundo año, D_2, puede ponerse como $D_1 \cdot 1,03$, donde D_1 representa el dinero obtenido en el primer año. A su vez, $D_1 = D_0 \cdot 1,03$, donde D_0 es nuestro capital inicial, esto es, 500€. Con todo, el dinero obtenido al cabo del segundo año puede expresarse como:

$$D_2 = D_1 \cdot (1,03) = D_0 \cdot (1,03) \cdot (1,03) = 500 \cdot (1,03)^2$$

De aquí se concluye que el dinero obtenido al cabo de t años puede expresarse como una función exponencial $f(t) = 500 \cdot (1,03)^t$, lo cual resuelve este apartado.

Todas las variantes para dar con la función deberían ser análogas, expresadas con mayor o menor uso del lenguaje algebraico, observando más casos e incluso calculando el dinero obtenido en sucesivos periodos.

Apartado (b): la resolución de este apartado pasa por evaluar la función $f(t) = 500 \cdot (1,03)^t$ para los valores $t = 3$ y $t = 5$.

Apartado (c): para resolver la ecuación exponencial

$$600 = 500 \cdot (1,03)^t$$

pueden seguirse varias vías. En primer lugar, pueden darse distintos valores a la t para observar el comportamiento numérico de la función. Así, no es difícil observar que para $t = 6$ se obtiene el valor $f(6) = 597,03$€, mientras que para $t = 7$ obtenemos $f(7) = 614,94$€. Así, puede concluirse que necesitaremos, como mínimo, esperar 7 años antes de retirar nuestro dinero del banco para obtener la cantidad deseada.

La segunda manera de resolver el apartado pasa por hacer uso de los logaritmos.

En efecto, aplicando logaritmos decimales a ambos lados del igual queda:

$$\log(600) = \log\left(500 \cdot (1,03)^t\right)$$
$$\log(600) = \log(500) + t \cdot \log(1,03)$$
$$t = \frac{\log(600) - \log(500)}{\log(1,03)} \approx 6,17$$

A partir de este punto debe interpretarse correctamente el enunciado. Dado que el banco sólo ingresa dinero al final de cada año completo, debemos redondear a 7 el número de años obtenido para dar con la solución.

Finalmente, otra manera de resolver la ecuación planteada puede ser aplicando la definición de logaritmo. Así:

$$600 = 500 \cdot (1,03)^t$$
$$1,2 = (1,03)^t$$

Esto nos lleva a calcular el logaritmo de $1,2$ en base $1,03$, lo cual puede llevarse a cabo utilizando la fórmula del cambio de base para emplear la calculadora. De igual modo que en el caso anterior, hay que redondear adecuadamente el resultado para dar la solución al problema.

Posibles errores cometidos:

Apartado (a): existen distintos problemas que pueden surgir aquí. En primer lugar, la incomprensión del enunciado del problema o su mala interpretación puede dar lugar a errores. Sin embargo, dado que los problemas de cálculo de interés compuesto se han visto en clase en numerosas ocasiones y todos tienen un enunciado fácilmente reconocible, no se espera que los errores surjan debido a problemas en la identificación del tipo de problema y su relación con posibles estrategias de resolución. En segundo lugar pueden fallar las operaciones con porcentajes. Por último, la deducción de la expresión general del dinero obtenido a partir del cálculo realizado para diversos años puede resultar costosa si no se tiene el suficiente nivel de abstracción.

Apartado (b): no deberían surgir errores en este apartado aparte de los derivados de un mal uso de la calculadora o los errores de operaciones al evaluar la función.

Apartado (c): el primer error que cabe esperar se deriva de la confusión en el establecimiento de la ecuación a resolver. En efecto, no sería infrecuente que los alumnos pretendieran resolver este apartado evaluando la función $f(t)$ hallada para el valor $t = 600$. Una vez obtenida la ecuación adecuada, pueden surgir dos tipos de problemas fundamentalmente: el primero tiene que ver con el método de resolución, que puede llevar a errores en el manejo de las propiedades de logaritmos, en la utilización de la fórmula de cambio de base o en la evaluación de la función para distintos valores de t. El segundo problema sólo afecta a aquellos alumnos que hayan obtenido una respuesta numérica no entera al resolver la ecuación mediante el uso de logaritmos. Aquí pueden aparecer confusiones derivados de una intepretación incorrecta del enunciado, ya que podrían darse como respuestas $t = 6$ o $t = 6,17$, sin observar que la respuesta correcta es $t = 7$ por las condiciones dadas por el banco.

[**5**] El *decibelio* es la medida utilizada para expresar el **nivel de la potencia** de un ruido, tal y como éste es percibido por un oyente. Si w denota la potencia del ruido y $w_0 = 10^{-12}$ vatios/m^2 es el valor de referencia para el umbral de audición, la función que relaciona la potencia del ruido con la percepción de ese mismo ruido (en decibelios, dB) es la siguiente:

$$L(w) = 10 \cdot \log\left(\frac{w}{w_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{w}{10^{-12}}\right)$$

a) Supongamos que se emiten sucesivamente varios sonidos, con potencias $w = 5$ vatios/m^2, $w = 50$ vatios/m^2, $w = 500$ vatios/m^2, $w = 5\,000$ vatios/m^2 y $50\,000$ vatios/m^2. ¿Cómo van aumentando los decibelios? **(3 puntos)**

b) La percepción del sonido de una conversación se estima en 40 dB aproximadamente. Del mismo modo, La percepción del sonido de un concierto es de unos 120 dB. ¿Podemos decir que la potencia del sonido de un concierto es el triple (3 veces mayor) que la del sonido de una conversación? Justifica tu respuesta. **(5 puntos)**

- **Campo de problemas:**
  - *Apartado (a)*: CP1.1, CP1.2, CP1.3, CP1.4.
  - *Apartado (b)*: CP5.1, CP5.2, CP5.4.
- **Técnicas:**
  - *Apartado (a)*: T1.1, T1.3, T1.5.
  - *Apartado (b)*: T6.1 (opcionalmente T6.2).
- **Tecnologías:**
  - *Apartado (a)*: aparece implícitamente TEC1.
  - *Apartado (b)*: ninguna.

Estándares de aprendizaje evaluables (L.O.M.C.E. 2016):

- *Apartado (a)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.1.6.1, Est.MAAC.1.6.2, Est.MAAC.1.6.3, Est.MAAC.1.6.4, Est.MAAC.1.6.5, Est.MAAC.1.7.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.2, Est.MAAC.2.2.4, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.1.6.

- *Apartado (b)*: Est.MAAC.1.1.1, Est.MAAC.1.2.1, Est.MAAC.1.2.2, Est.MAAC.1.2.3, Est.MAAC.1.2.4, Est.MAAC.1.6.1, Est.MAAC.1.6.2, Est.MAAC.1.6.3, Est.MAAC.1.6.4, Est.MAAC.1.6.5, Est.MAAC.1.7.1, Est.MAAC.2.1.2, Est.MAAC.2.2.2, Est.MAAC.2.2.4, Est.MAAC.2.2.5, Est.MAAC.2.2.7, Est.MAAC.2.3.1, Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.1.6.

- **Tarea principal:**
  - *Apartado (a)*: determinar la regla que rige el aumento de los decibelios cuando la potencia de la fuente sonora aumenta en razón geométrica.
  - *Apartado (b)*: determinar la relación entre dos fuentes sonoras cuya percepción es, respectivamente, 40 dB y 120 dB. Concluir que esta relación no es lineal.

- **Tareas auxiliares específicas:**
  - *Apartado (a)*: determinar el aumento de los decibelios evaluando la función para los distintos valores de x, sea a mano (aplicando propiedades de los logaritmos) o con la ayuda de la calculadora (manejando adecuadamente además las órdenes para notación científica).
  - *Apartado (b)*: resolver dos ecuaciones logarítmicas empleando la definición de logaritmo. Interpretar adecuadamente los resultados obtenidos. Manejo de la notación científica.

- **Tareas auxiliares generales:**
  - *Apartado (a)*: operaciones aritméticas al evaluar la función.
  - *Apartado (b)*: interpretación de resultados para distinguir entre la relación "3 veces mayor" y la relación "n órdenes de magnitud mayor".

Posibles respuestas esperadas:

Apartado (a): a pesar de la aparente complejidad del enunciado, este apartado se resuelve sencillamente evaluando la función $L(w)$ para los valores $w = 5$, $w = 50$,

$w = 500$, $w = 5\,000$ y $w = 50\,000$ y observando cómo van aumentando las imágenes. La idea del problema consiste en darse cuenta de que cuando los argumentos de la función aumentan en progresión geométrica (de razón 10), sus imágenes lo hacen en progresión aritmética de razón (10). Así, podría darse una tabla como la siguiente:

Valor de w	Valor de $L(w) = 10 \cdot \log(w/10^{-12})$
$w = 5$	$126,98$ dB
$w = 50$	$136,98$ dB
$w = 500$	$146,98$ dB
$w = 5\,000$	$156,98$ dB
$w = 50\,000$	$166,98$ dB

El ejercicio se completa identificando adecuadamente el patrón que siguen los valores de $L(w)$, expresándolo en términos matemáticos.

Apartado (b): en primer lugar deben establecerse las siguientes ecuaciones:

$$40 = 10 \cdot \log\left(\frac{w}{10^{-12}}\right) \tag{1}$$

$$120 = 10 \cdot \log\left(\frac{w}{10^{-12}}\right) \tag{2}$$

Ambas pueden resolverse aplicando la definición de logaritmo. La primera ecuación arroja el valor $w = 10^{-8}$ vatios/m^2, mientras que de la segunda se obtiene el valor $w = 1$ vatio/m^2. A continuación debe observarse la relación entre estas dos cantidades, que está muy lejos de ser lineal. En efecto, el primer valor es 8 órdenes de magnitud más pequeño que el segundo. Ésta es la relación entre la potencia de las fuentes sonoras, por lo que no podemos decir que la potencia del sonido de un concierto sea el triple que la del sonido de una conversación.

Posibles errores cometidos:

Apartado (a): este apartado admite errores que tienen más que ver con una incorrecta interpretación del enunciado que con errores de tipo matemático. También pueden aparecer problemas en la evaluación de la función derivados de confusiones o falta de práctica con el uso de la notación científica. Por último, el alumno puede no reconocer el patrón que siguen los decibelios al ir aumentando el argumento de la función en progresión geométrica. No deben olvidarse tampoco las posibles imprecisiones o errores en el uso de terminología matemática.

Apartado (b): sin duda, el error más frecuente que se espera es el de afirmar inmediatamente que la potencia de las fuentes sonoras está en proporción de 1 a 3, dado que 120 dB es el triple de 40 dB. Además, pueden surgir problemas análogos a los expuestos en el apartado (a), derivados de la utilización inadecuada de la notación científica. Por otra parte, puede ocurrir que se resuelvan las ecuaciones de forma incorrecta. Un último error, también frecuente, es el de evaluar la función $L(w)$ para los valores $w = 40$ y $w = 120$ en vez de establecer la ecuación a resolver.

2. Criterio de calificación.

El **modelo de tercios** aporta un criterio jerárquico para penalizar errores en función del tipo de tarea a evaluar. La siguiente tabla puede considerarse un resumen de este modelo:

Tareas auxiliares generales Conjunto de errores $\leq 33\,\%$ de la puntuación Continuar calificando
Tareas auxiliares específicas Conjunto de errores $\leq 67\,\%$ de la puntuación Continuar calificando
Tareas principales Conjunto de errores $\leq 100\,\%$ de la puntuación Puede finalizar la calificación

En la corrección de esta prueba escrita nos atendremos estrictamente al modelo de tercios. Ello implica llevar a cabo el siguiente procedimiento de cara a redactar unos criterios de calificación que otro profesor pueda utilizar de manera fiable al corregir el examen:

1. Identificar las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales que se requieren para resolver cada uno de los apartados del examen.

2. Explicitar las posibles estrategias seguidas por los alumnos en la resolución de cada uno de los apartados, poniéndolas en relación con las tareas antes mencionadas. Este apartado reviste especial importancia en el caso de que quieran establecerse como válidas estrategias que tradicionalmente se penalizan (por ejemplo, el tanteo de soluciones a la hora de resolver una ecuación).

3. Aplicar los porcentajes establecidos por el modelo de tercios a los puntos de cada apartado, señalando las penalizaciones máximas posibles para cada apartado en función de los errores en las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales.

A continuación exponemos, como ejemplo de lo anterior, el criterio de calificación detallado correspondiente al apartado (a) del ejercicio [1]:

[1] Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $3^4 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 1 = 0$. **(3 puntos)**

Criterio de calificación:

Descripción del error	**Penalización**
El alumno no valida la solución obtenida sustituyéndola	0,1 puntos
Errores en el tanteo de posibles soluciones de la ecuación	0,1 puntos
El alumno no explica los pasos seguidos en la resolución	0,25 puntos
Las justificaciones del alumno son defectuosas	0,25 puntos
Errores en operaciones elementales	0,5 puntos
Errores en la manipulación básica de expresiones algebraicas	0,5 puntos
Resolución incorrecta de la ecuación de segundo grado	0,75 puntos
Resolución incorrecta de la ecuación $3^x = 1/9$	1 punto
Errores en la realización de operaciones con potencias	1 punto
Errores fundamentales en la aplicación de la técnica de cambio de variable.	2 puntos
El alumno no consigue desarrollar una estrategia adecuada para la resolución de la ecuación	2 puntos

Las rúbricas obtenidas para el resto de los apartados del examen son totalmente análogas a la mostrada aquí, y pueden realizarse sin problemas aplicando el método expuesto más arriba. En aras a la brevedad hemos decidido omitirlas, ya que no aportan nada nuevo a la exposición.

Finalmente, deben tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- La penalización por errores en la ejecución de tareas auxiliares generales nunca debe superar un tercio de la calificación del apartado, aunque haya múltiples fallos. Esto se aplica especialmente al calificar los posibles errores en operaciones elementales.

- La penalización por errores en la ejecución de tareas auxiliares específicas nunca debe superar dos tercios de la calificación, aunque éstos sean múltiples y reiterados.

- En lo que respecta a las respuestas incompletas, el corrector deberá considerar hasta qué punto el alumno ha desarrollado una estrategia adecuada para la resolución de la tarea principal. En todo caso deberán calificarse positivamente todas las tareas auxiliares, generales y específicas, necesarias para la resolución de la tarea principal, que el alumno emplee correctamente.

3. Comunicación y gestión de los resultados del examen.

Tras la corrección de los exámenes, éstos se entregarán a los alumnos en clase por orden alfabético. Puede ser conveniente dedicar una sesión a corregir el examen en la pizarra (no contemplada en la secuencia didáctica), señalando tanto los fallos cometidos como las respuestas más interesantes por su elegancia o su corrección. Al final de la clase, se ofrecerá a los alumnos la posibilidad de subir 0,5 puntos la nota del examen si lo entregan después de resolverlo correctamente en casa, señalando la razón de los fallos cometidos en el examen realizado. Para ello se les entregarán a los alumnos fotocopias de sus exámenes respectivos, guardando el profesor los originales.

Referencias

Arias, J., y Maza, I. (2016). *4º E.S.O. matemáticas académicas.* Ed. Bruño.

Colera, J., Oliveira, M., Gaztelu, I., y Colera, R. (2016). *4º E.S.O. matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.* Ed. Anaya.

de Lucas, M., Peña, M., y Rey, M. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º E.S.O.* Ed. Oxford.

Ferrari, M., y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 309–354.

Ferrari, M., y Farfán, R. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 53–68.

Gacharná, L. (2015). Propuesta didáctica para abordar los logaritmos por medio de la regla de formación de la función logarítmica. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *68*, 60–66.

Gámez, J., Gaztelu, A., Loysele, F., Marín, S., Pérez, C., y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas. enseñanzas académicas, 4º E.S.O.* Ed. Santillana.

Mejía, D., Ocaña, J., y Romero, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º E.S.O.* Ed. Edelvives.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (s.f.).

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (s.f.).

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, *7*(3), 41–51.

Vizmanos, J., Anzola, M., de los Santos, I., y Hervás, J. (2009). *Matemáticas 4º E.S.O.* Ediciones SM.